Lagrange multipliers を用いたスカラー・テンソル理論による宇宙定数問題の理解

小川 達也 (大阪市立大学大学院 理学研究科)

Abstract

アインシュタインの導入した宇宙項はエネルギー運動量テンソルへの寄与とみなすことができる。この宇宙項から導き出される、真空のエネルギー密度は一定値を持つ。このとき、宇宙定数は空間の持つ体積そのものが持つエネルギー、つまり真空のエネルギーとみなすことができるが、単純に量子場の真空エネルギー密度を宇宙定数の起源であるとすると、観測値との間に１２３桁以上もの食い違いが現れてしまう。これが宇宙定数問題である。この宇宙定数問題を理解するための一つの方法が、Lagrange multipliers を用いたものである。本発表ではこの方法について論じた、Diego Saez-Gomes の論文のレビューを行う。

1　フリードマン方程式

宇宙には特別な場所も、特別な方向も存在しないという宇宙原理を満たす時空の計量は、「フリードマン・ルメートル・ロバートソン・ウォーカー計量 (FLRW)」であり、

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a^2(t)[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2)] \tag{1}$$

と表される。ここで、$a(t)$ はスケール因子と呼ばれ、宇宙の膨張あるいは収縮の度合いを表すものである。これを用いて表される一様等方時空におけるアインシュタイン方程式は、「フリードマン方程式」と呼ばれ、

$$(\frac{\dot{a}}{a})^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho - \frac{cK^2}{a^2} \tag{2}$$

で表される。

2　宇宙定数とダークエネルギー

アインシュタインは定常宇宙を実現するために、宇宙項を付け加えアインシュタイン方程式を修正した。この修正を施すとフリードマン方程式は

$$(\frac{\dot{a}}{a})^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho - \frac{cK^2}{a^2} + \frac{c^2\Lambda}{3} \tag{3}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho + 3p) + \frac{c^2\Lambda}{3} \tag{4}$$

となる。観測的に膨張宇宙が確認され、定常宇宙は否定されたが、宇宙項をエネルギー運動量テンソルへの寄与とみなすことで

$$\rho_A = \frac{c^4\Lambda}{8\pi G}, p_A = -\frac{c^4\Lambda}{8\pi G} \tag{5}$$

を持つことがわかる。宇宙膨張の加速を説明するためには $\rho + 3p < 0$ を満たすような新しい流体成分の存在が必要となる。この一般化された流体成分を「ダークエネルギー」と呼ぶ。

3　宇宙定数問題

宇宙項によって導き出される真空のエネルギー密度は

$$\rho_A = \frac{c^4\Lambda}{8\pi G}$$

である。宇宙定数は空間の持つ体積そのものが持つエネルギー、つまり真空のエネルギーとみなすことができる。しかし、単純に量子場の真空エネルギー密度を宇宙定数の起源とすると、観測地との間に１２３桁以上もの食い違いが現れてしまう。これが「宇宙定数問題」である。

4 Lagrange multipliers を用いた、スカラー・テンソル理論

作用を

$$\int d^4x\sqrt{-g}\{\frac{R}{2\kappa^2}-\frac{\omega(\phi)}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-V(\phi)$$
$$-\lambda F(\phi,\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi,\cdots)+\mathcal{L}_m\} \quad (6)$$

とする。ここで $\kappa=8\pi G$,λ は Lagrange multipliers である。Lagrange multipliers はスカラー場として振舞う。メトリック $g_{\mu\nu}$ を用いてこの式を書き換え、λ について変分をとることで、スカラー場 ϕ の方程式

$$F(\phi,\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi,\cdots)=0 \quad (7)$$

が得られる。制限の効果を見るために、簡単な例を考える。すると (7) は

$$F(\phi,\partial_\phi\partial^\phi,\cdots)=F(\phi)=0 \quad (8)$$

この方程式を解くことで得られる解は、定スカラー場 $\phi(t)=\phi_0$ を与える。ゆえに、エネルギー運動量テンソルは効果的な宇宙定数 $T^{(\phi,\lambda)}_{\mu\nu}=-g_{\mu\nu}V_0$ を与える。

非定スカラー場の場合、

$$F(\phi,\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi,\cdots)=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi+U(\phi)=0 \quad (9)$$

を考える。今考えている限りにおいて、スカラー場は時間のみに依存するので $\phi=\phi(t)$ である。このことにより (9) は

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2-U(\phi)=0\rightarrow\frac{d\phi}{\sqrt{2U(\phi)}}=\pm dt \quad (10)$$

となる。メトリック

$$ds^2=-dt^2+a(t)^2\sum_{i=1}^{3}dx^{i2} \quad (11)$$

と (10) により、FLRW 方程式は

$$H^2=\frac{\kappa^2}{3}[(\omega(\phi)+2\lambda)U(\phi)+V(\phi)+\sum_i\rho_i]$$
$$-3H^2-2\dot{H}=\kappa^2[\omega(\phi)U(\phi)-V(\phi)+\sum_i\omega_i\rho_i] \quad (12)$$

となる。

5 宇宙定数の緩和

(12) の二番目の式で記述される FLRW 宇宙を考える。

$$-\frac{1}{\kappa^2}(3H^2+2\dot{H})=\omega_m\rho_m-\rho_{vac}+\frac{1}{2}\dot{\phi}^2-V(\phi) \quad (13)$$

ここで、ρ_m は物質によるエネルギー密度、$\rho_{vac}=\frac{\Lambda}{\kappa^2}$ は真空のエネルギー密度であり、$\omega(\phi)=1$ で与えられる定数の運動エネルギー項を考えている。このとき、時間に依存する効果的な宇宙定数を定義し、

$$\Lambda_{eff}(t)=\Lambda-\kappa^2(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2-V(\phi))=\Lambda-\kappa^2(U(\phi)-V(\phi)) \quad (14)$$

適切なスカラーポテンシャルにより、(13) は

$$-3H^2-2\dot{H}=\kappa^2\omega_m\rho_m-\Lambda_{eff} \quad (15)$$

となる。

ここから、具体的なポテンシャルの形を与えて考えていく。ポテンシャルの形は

- $U(\phi)=\frac{\Lambda_\phi}{\kappa^2}+V(\phi)$
- $U(\phi)=2V(\phi)=\frac{1}{2}m^2\phi^2$
- $U(\phi)=\frac{\phi^2}{2},V(\phi)=\frac{\phi_0^2\kappa^2(\alpha\phi^2+\phi_0^2)-2\Lambda_\phi\phi_0(\phi-\phi_0t_0)}{2\kappa^2(\alpha\phi^2-\phi_0^2)}$

を考える。

Reference

[1] Diego Saez-Gomez. 2012.
arXiv:1110.6033v2 [hep-th] 9 Jan 2012

[2] S.Nojiri and S.D.Odinstov,Phys.Rept.505 59(2011)
arXiv:1011.0544 [gr-qc]

[3] 松原隆彦
現代宇宙論-時空と物質の共進化　東京大学出版会