bigravity 理論に基づく宇宙論とダークエネルギー問題

青木　勝輝 (早稲田大学大学院 先進理工学研究科)

Abstract

本研究では bigravity 理論を用いて、時空がどちらも Friemnann- Lemaître-Robertson-Walker（FLRW）計量で表される場合の宇宙論を考える。物質としてはダストを考え、どちらの計量もそれぞれ異なる物質と相互作用する。解析の結果、真空解は最大４つのブランチをもつが、２つの物質の密度比が宇宙が膨張するにつれどの真空解に漸近するかを決定する。また宇宙膨張の途中で特異点をもつような解も発見された。

1　Introduction

近年の宇宙観測の結果は我々の宇宙が現在加速膨張していることを示唆している。一般相対性理論 (GR) と宇宙の一様等方性（FLRW 計量）を基礎とするビッグバン標準宇宙論では、正の宇宙項、または膨張を加速する圧力が負のダークエネルギーという奇妙な物質が必要となる。宇宙項であるとすると非常に不自然な微調整が必要で、またダークエネルギーについてもその正体は全く不明である。この宇宙の加速膨張を説明する別のアプローチとしては、宇宙論的スケールで重力理論を GR から変更するという立場がある。もし加速膨張を自然に説明できるもっともらしい重力理論が可能であれば、ダークエネルギーという奇妙な物質を導入する必要はなくなる。

重力理論を変更する一つの自然な方向として、重力子に質量をもたせることが考えられる。GR において重力子は質量ゼロであるが、これを裏付ける絶対的な証拠はまだない。素粒子論の立場から考えても重力子に質量を持たせるのは自然な拡張である。このアイデアは Fierz と Pauli から始まり (M. Fierz and W. Paui. 1939) これまでにもさまざまな研究がされてきたが、いくつかの理論的困難が存在した (例えば ghost の存在 (D. G. Boulware and S. Deser. 1972))。近年、これらの理論的困難を解決した massive な重力理論 (C. de Rham, G. Gabadadze and A. J. Tolley. 2011) が見つかり、注目を浴びている。この ghost free massive gravity 理論では通常の計量の他に、４つの Stuckelberg スカラー場を導入し、その相互作用に質量項が含まれる。宇宙論的にはこの質量が宇宙項のように振る舞う。この massive gravity では Stuckelberg スカラー場を仮想座標と見たとき、その時空は Minkowski 計量となるが、この場合平坦なフリードマン時空が存在できないことが明らかにされた (G. D ’ Amico et al. 2011)。そのために、この仮想空間を拡張し de Sitter 時空といった曲がった時空に拡張し宇宙論が議論されるようになった。しかしこの場合、その仮想空間にどのようなものを考えるかで我々の世界の宇宙論が変わるという奇妙な状況が生じる。

本研究で扱う bigravity 理論は、この massive gravity 理論において現れる仮想計量も物理的実在と考え、我々の世界の計量同様に、動的なものに拡張した理論である (S. F. Hassan and R. A. Rosen. 2012)。すなわち、一つの時空に２つの計量を導入し、それらがある相互作用項によって互いに影響を受ける。この相互作用項が重力子に質量を与え、加速膨張を実現する。２つの計量が FLRW 計量で表されるとき、真空では２つの計量に比例関係があることが明らかにされた (Volkov. 2012)。その安定性についても議論がされている (Y. Sakakihara et al. 2013)。比例係数は４次方程式の解として与えられるが、宇宙が真空に近づくときどのブランチを選ぶかは議論されていない。またこれらの研究では一方の計量にしか物質を入れていない。

我々は２つの計量が FLRW 計量であると仮定し、さらに２つの計量はそれぞれ異なる物質と相互作用すると仮定する。このとき２つの物質密度比の変化によって解のブランチが変化することを示した。したがって物質の密度比の変化が宇宙の進化を変化させる。これをダークエネルギー問題と対応させると、

現在の加速膨張を説明するためには物質の密度比がある条件を満たさなければならないことになる。

2 Hassan-Rosen bigravity

Ghost-free bigravity 理論における作用は次で与えられる。

$$S = \frac{1}{2\kappa_g^2}\int d^4x\sqrt{-g}R(g) + \frac{1}{2\kappa_f^2}\int d^4x\sqrt{-f}\mathcal{R}(f), \\ -\frac{m^2}{\kappa^2}\int d^4x\sqrt{-g}\mathscr{U}(g,f) + S^{[\mathrm{m}]}(g) + \mathcal{S}^{[\mathrm{m}]}(f) \quad (1)$$

ここで $R(g)$ と $\mathcal{R}(f)$ はそれぞれ $g_{\mu\nu}$、$f_{\mu\nu}$ に対するリッチスカラーであり、$\kappa_g^2 = 8\pi G$ と $\kappa_f^2 = 8\pi\mathcal{G}$ はそれぞれの重力定数で、$\kappa^2 = \kappa_g^2 + \kappa_f^2$ である。$S^{[\mathrm{m}]}, \mathcal{S}^{[\mathrm{m}]}$ は物質の作用を表し、それぞれ一方の計量としか相互作用しない。２つの計量の相互作用項は

$$\mathscr{U}(\gamma) = \sum_{k=0}^{4} b_k \mathscr{U}_k(\gamma), \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{U}_0(\gamma) &= -\frac{1}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}, \\
\mathscr{U}_1(\gamma) &= -\frac{1}{3!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\alpha\nu\rho\sigma}\gamma^\mu{}_\alpha, \\
\mathscr{U}_2(\gamma) &= -\frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}\gamma^\mu{}_\alpha\gamma^\nu{}_\beta, \\
\mathscr{U}_3(\gamma) &= -\frac{1}{3!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\sigma}\gamma^\mu{}_\alpha\gamma^\nu{}_\beta\gamma^\rho{}_\gamma, \\
\mathscr{U}_4(\gamma) &= -\frac{1}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\gamma^\mu{}_\alpha\gamma^\nu{}_\beta\gamma^\rho{}_\gamma\gamma^\sigma{}_\delta
\end{aligned} \quad (3)$$

により与えられ、b_k は任意の結合定数である。

相互作用項は $\mathcal{K}^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu - \gamma^\mu{}_\nu$ を用いることで

$$\mathscr{U}(\mathcal{K}) = \sum_{k=0}^{4} c_k \mathscr{U}_k(\mathcal{K}) \quad (4)$$

とも書き直すことができる。作用にある m を重力子の質量であるとした場合

$$c_2 = b_1 + 2b_2 + b_3 = -1 \quad (5)$$

と結合定数は規格化される。さらに２つの計量がともに Minkowski 時空である状態を真空解とする場合

$$c_0 = c_1 = 0 \quad (6)$$

を満たす。このときの b_k と c_k の関係は

$$\begin{aligned}
b_0 &= 4c_3 + c_4 - 6, \\
b_1 &= 3 - 3c_3 - c_4, \\
b_2 &= 2c_3 + c_4 - 1, \\
b_3 &= -(c_3 + c_4), \\
b_4 &= c_4
\end{aligned} \quad (7)$$

で与えられる。

場の方程式は

$$G^\mu{}_\nu = \kappa_g^2(T_g^{[\gamma]\mu}{}_\nu + T_g^{[\mathrm{m}]\mu}{}_\nu) \quad (8)$$

$$\mathcal{G}^\mu{}_\nu = \kappa_f^2(\mathcal{T}_f^{[\gamma]\mu}{}_\nu + \mathcal{T}_f^{[\mathrm{m}]\mu}{}_\nu) \quad (9)$$

で与えれ、$G^\mu{}_\nu$、$\mathcal{G}^\mu{}_\nu$ はそれぞれの Einstein テンソルである。物質のエネルギー運動量テンソルは $T_g^{[\mathrm{m}]\mu}{}_\nu$、$\mathcal{T}_f^{[\mathrm{m}]\mu}{}_\nu$ であり、２つの計量の相互作用によるエネルギー運動量テンソルは

$$T_g^{[\gamma]\mu}{}_\nu = \frac{m^2}{\kappa^2}\left(\tau^\mu{}_\nu - \mathscr{U}\delta^\mu{}_\nu\right), \quad (10)$$

$$\mathcal{T}_f^{[\gamma]\mu}{}_\nu = -\frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{-f}}\frac{m^2}{\kappa^2}\tau^\mu{}_\nu \quad (11)$$

によって記述される。ここで

$$\begin{aligned}
\tau^\mu{}_\nu =\ & \frac{b_1}{6}\epsilon_{\nu\beta\rho\sigma}\epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}\gamma^\mu{}_\alpha + \frac{b_2}{2}\epsilon_{\nu\lambda\rho\sigma}\epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}\gamma^\mu{}_\alpha\gamma^\lambda{}_\beta \\
&+\frac{b_3}{2}\epsilon_{\mu\lambda\rho\sigma}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\sigma}\gamma^\nu{}_\alpha\gamma^\lambda{}_\beta\gamma^\rho{}_\gamma \\
&+\frac{b_4}{6}\epsilon_{\mu\lambda\rho\sigma}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\gamma^\nu{}_\alpha\gamma^\lambda{}_\beta\gamma^\rho{}_\gamma\gamma^\sigma{}_\delta
\end{aligned} \quad (12)$$

である。

物質はそれぞれ一方の計量としか相互作用しないため、２つの保存則

$$\overset{(g)}{\nabla}_\mu T_g^{[\mathrm{m}]\mu}{}_\nu = 0,\ \overset{(f)}{\nabla}_\mu \mathcal{T}_f^{[\mathrm{m}]\mu}{}_\nu = 0 \quad (13)$$

を独立に満たす。ここで $\overset{(g)}{\nabla}_\mu$ と $\overset{(f)}{\nabla}_\mu$ はそれぞれの計量に対する共変微分である。このとき Bianchi 恒等式からさらに２つの保存則

$$\overset{(g)}{\nabla}_\mu T_g^{[\gamma]\mu}{}_\nu = 0,\ \overset{(f)}{\nabla}_\mu \mathcal{T}_f^{[\gamma]\mu}{}_\nu = 0 \quad (14)$$

が導かれる。

3 Cosmologies in bigravity

２つの計量は FLRW 計量であると考える。

$$ds_g^2 = -dt^2 + a_g^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2\right), \quad (15)$$
$$ds_f^2 = -A^2(t)dt^2 + a_f^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2\right) \quad (16)$$

スケールファクタの比として $B(t) = a_f(t)/a_g(t)$ を定義し、また $f_{\mu\nu}$ の固有時間を τ で表す。

物質はともに完全流体であると仮定し、エネルギー運動量テンソルは

$$T_g^{[\mathrm{m}]\mu}{}_\nu = \mathrm{diag}(-\rho_g, P_g, P_g, P_g), \quad (17)$$
$$T_f^{[\mathrm{m}]\mu}{}_\nu = \mathrm{diag}(-\rho_f, P_f, P_f, P_f) \quad (18)$$

で表され、保存則 (13) を満たす。一方相互作用項の保存則は次の条件によって満たされる。

$$\frac{da_f(\tau)}{d\tau} = \frac{da_g(t)}{dt} \quad (19)$$

このとき $G^0{}_0 = B^2\mathcal{G}^0{}_0$ が成り立ち、２つの発展方程式から１つの代数方程式が得られる。

無次元の量を導入する。$g_{\mu\nu}$ の量について

$$\bar{\rho}_g = \frac{\kappa^2\rho_g}{m^2},\ \bar{P}_g = \frac{\kappa^2 P_g}{m^2},\ \bar{t} = mt \quad (20)$$

と規格化を行い、$f_{\mu\nu}$ についても同様である（今後バーは省略する）。また重力定数と物質密度の比として $\rho^* = \rho_f/\rho_g$, $\kappa^{*2} = \kappa_f^2/\kappa_g^2$ を導入する。

物質はダストであるとし、$\rho_{g,\mathrm{m}} = \rho_{g,\mathrm{m0}}/a_g^3, \rho_{f,\mathrm{m}} = \rho_{f,\mathrm{m0}}/a_f^3$ と変化する。このとき基礎方程式は

$$\frac{\dot{a_g}^2}{a_g^2} + \frac{k}{a_g^2} = \frac{1}{3+3\kappa^{*2}}(\Lambda_g(B) + \rho_g), \quad (21)$$
$$C_\Lambda(B) - C_\mathrm{m}(B)\frac{\rho_{g,\mathrm{m0}}}{a_g^3} = 0 \quad (22)$$

である。上の式はスケールファクタの発展方程式であり、下の式は $G^0{}_0 = B^2\mathcal{G}^0{}_0$ から得られる代数方程式である。ここで

$$C_\Lambda(B) = B\Lambda_g(B) - \kappa^{*2}B^3\Lambda_f(B), \quad (23)$$
$$C_\mathrm{m}(B) = \kappa^{*2}\rho^*_{\mathrm{m0}} - B \quad (24)$$

である。なお $\rho^*_{\mathrm{m0}} = \rho_{f,\mathrm{m0}}/\rho_{g,\mathrm{m0}}$ であり、

$$\Lambda_g(B) = b_0 + 3b_1 B + 3b_2 B^2 + b_3 B^3, \quad (25)$$
$$\Lambda_f(B) = b_4 + \frac{3b_3}{B} + \frac{3b_2}{B^2} + \frac{b_1}{B^3} \quad (26)$$

である。$B = B(a_g)$ は一般に a_g の複雑な関数で与えられるが、$a_g = a_g(B)$ は (22) により簡単な関数で与えられる。そこで (21) を B の発展方程式に書き直すと

$$\dot{B}^2 + V_g(B) = 0 \quad (27)$$

の形になる。ここでポテンシャル $V_g(B)$ は

$$V_g(B) = -\frac{3C_\mathrm{m}C_\Lambda^2}{(C_\Lambda C'_\mathrm{m} - C_\mathrm{m}C'_\Lambda)^2} \times\left[\frac{1}{1+\kappa^{*2}}(\Lambda_g C_\mathrm{m} + C_\Lambda) - 3k\rho_{g,\mathrm{m0}}^{-\frac{2}{3}}C_\Lambda^{\frac{2}{3}}C_\mathrm{m}^{\frac{1}{3}}\right] \quad (28)$$

である。なお $'$ は B に関する微分である。

真空では４次方程式 $C_\Lambda(B) = 0$ を満たす。この方程式の正の解を B_Λ とすると真空では B の値は B_Λ であり、このとき (19) から $A = B_\Lambda$ である。すなわち真空では２つの計量は比例関係にある。また宇宙が膨張を続けた場合、B は B_Λ に漸近していく。

スケールファクタの初期値を $a_g \to 0, a_f \to 0$ で与えるとすると、B の初期値は $C_\mathrm{m} \to 0$ で与えられる。すなわち B の初期値は $B \to \kappa^{*2}\rho^*_{\mathrm{m0}}$ である。したがってこの初期値で (27) を解くことで、宇宙の発展を議論することが可能である。

宇宙の時間発展において、一方のみが特異点となるような解が存在する。図 1 は横軸を t と τ にした場合のスケールファクタの発展を示してる。このとき $\dot{a}_f(t) = 0$ を満たす点では $A = 0$ となり、$f_{\mu\nu}$ の曲率が発散し特異点となっている。しかしこのとき $g_{\mu\nu}$ は特異点でない。このとき $f_{\mu\nu}$ を我々の宇宙の計量であるとみなすことはできない。$f_{\mu\nu}$ のスケールファクタが収縮している領域では $A < 0$ となっており、時間的閉曲線が生じる可能性がある。そのため $g_{\mu\nu}$ を我々の宇宙と見なすことも因果律を破るため不適である。したがってこのような解は排除しなければならない。

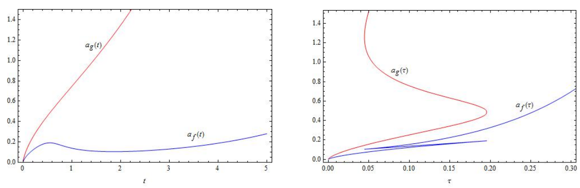

図 1: t と τ に対するスケールファクタの時間発展

4 Self-accelerating solutions

宇宙が加速膨張を実現するための条件を具体的にみる。ここで Minkowski 時空を真空解に含むと仮定し、結合定数は (7) で表されるとする。このとき

$$c_3 < 0, c_3 + c_4 < 0, 2c_3^2 + 3c_4 > 0 \tag{29}$$

あるいは

$$c_3 > 3, 3c_3 + c_4 < 3, 2c_3^2 + 3c_4 > 0. \tag{30}$$

を満たせば、真空で de Sitter 時空（加速膨張解）をもつ。

図 2 は左に $b_0 = 4c_3 + c_4 - 6 = 0$ のとき、右に $b_4 = c_4 = 0$ のときの加速膨張を実現するための $\rho^*_{\mathrm{m}0}$ の条件を示している。ただし $\kappa^{*2} = 1$ としている。赤の領域に $\rho^*_{\mathrm{m}0}$ をとれば宇宙は最終的に加速膨張を実現する。一方緑の領域では宇宙は膨張を続けるが、減速膨張である。黄色は特異点が現れる領域を示している。特に左図では $f_{\mu\nu}$ が特異点を通過し、一方右図では $g_{\mu\nu}$ が特異点を通過する。白の領域では宇宙がつぶれてしまう。

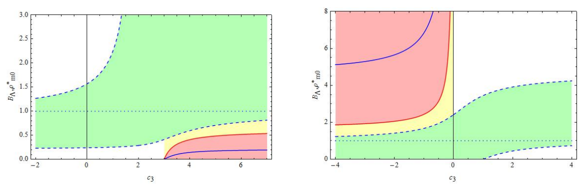

図 2: 4 次方程式 $C_\Lambda = 0$ の正の解（青線）、加速膨張するための ρ^*_{m} の値（赤い領域）。なお破線は $\Lambda_g(B_\Lambda) < 0$、点線は $\Lambda_g(B_\Lambda) = 0$ であり実線は $\Lambda_g(B_\Lambda) > 0$ を満たす。黄色領域は特異点をもつ解である。

次に結合定数の値を固定し、κ^{*2} を変化させる。図 3 では結合定数を $c_3 = 4, c_4 = -10$ とした場合の結果である。この結果、定量的な変化はあるものの定性的には変化しないことがわかる。

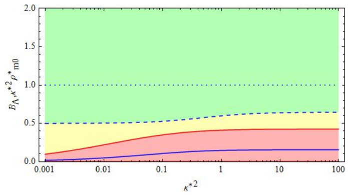

図 3: κ^{*2} に対する変化

5 Conclusion

本研究では bigravity 理論を用いて 2 つの計量がともに一様等方である場合の宇宙論を考えた。宇宙が膨張を続けると 2 つの計量は比例関係に漸近し、その比例係数は 4 次方程式の解によって表される。また 2 つのスケールファクタの比を用いることで宇宙の発展を計算することが可能であり、スケールファクタの比の初期値は物質の密度比によって与えられる。宇宙の膨張の途中で特異点を通過するような解が発見され、その解は因果律が破れている可能性がある。

解析の結果どの比例係数に漸近するかは物質の密度比によって決定される。また特異点が現れるか否かについても物質の密度比が影響する。したがって bigravity 理論において現在の宇宙が実現されるための条件は、結合定数のみではなく、結合定数と物質密度比によって表される。

しかしより一般的な状況において密度比の変化が計量にどのような影響を与えるかは不明である。また今回発見された因果律を破るような解が他の状況でも存在するかどうかも不明である。

Reference

S. F. Hassan and R. A. Rosen, JHEP 02 (2012) 126.

M. Fierz and W. Paui, Proc. Roy. Soc. Lond. A 173 (1939) 211.

D. G. Boulware and S. Deser, Phys. Rev. D 6, 3368 (1972).

C. de Rham, G. Gabadadze and A. J. Tolley, Phys. Rev. Lett. 106 (2011) 231101.

G. D'Amico, C. de Rham, S. Dubovsky, G. Gabadadze, D. Pirtskhalava and A. J. Tolley, Phys. Rev. D 84 (2011) 124046.

M. S. Volkov, JHEP 1201 (2012) 035.

Y. Sakakihara, J. Soda, and T. Takahashi, PTEP 2013 (2013) 033E02.