Bigravity 理論における加速膨張宇宙解

岡崎 智久 (京都大学大学院 基礎物理学研究所)

Abstract

宇宙の加速膨張を説明する試みに、一般相対論に宇宙項を導入する代わりに、重力理論を修正しようとするものがある。本発表ではその一つである ghost-free な bigravity 理論に着目し、可能な宇宙モデルを調べる。四脚場を用いて理論を定式化し、一様等方な物質分布の下で方程式を解くことで、宇宙論的な解が得られる。この解は graviton の質量に由来する有効的な宇宙項によって加速膨張が起こり、観測結果を自然に説明できる可能性がある。ここでは ghost-free な bigravity の作用をもとに、解の導出や性質についてのレビューを行う。

1 Introduction

超新星の赤方偏移の観測などから、現在宇宙は加速膨張をしていることが知られている。これを一般相対性理論の枠組で説明しようとすると、0 でない宇宙項の存在が必要になる。しかし、観測値が理論から期待される値よりも桁違いに小さく、起源をどこに求めるかが問題になっている。

そこで、宇宙項を導入する代わりに、重力理論そのものを修正することで加速膨張を説明しようとするアプローチが議論されている。修正理論には以下に述べる massive gravity や bigravity と呼ばれるものがある。場の理論の観点では、一般相対論において重力相互作用の伝播は質量 0 のゲージ粒子 graviton が担っているが、その拡張として graviton に質量を持たせる massive gravity が考えられた。重力が湯川型の短距離力となるため遠距離で実効的に斥力が働く結果、宇宙の加速膨張が起こると期待されている。Massive gravity では、graviton を固定された背景時空上の場として扱うため、背景時空の計量を補助場として導入する。その補助場を固定せずに力学的な対象として扱う理論が考えられ、bigravity と呼ばれている。

これらの理論には、場の理論から期待されるよりも一つ余分な自由度があることが知られていた [1]。この自由度は ghost と呼ばれ、一般に Hamiltonian を下に非有界にするため、理論自体の欠陥であると考えられていた。ところが最近になって massive gravity, bigravity ともに ghost の自由度が存在しないモデルが発見され [2,3]、現実の世界を記述する可能性があると注目を集めている。

これら ghost-free な理論の宇宙論的解についても盛んに研究されている。まず massive gravity について、厳密解やその安定性が調べられた。その後 bigravity についても真空など特別な設定の下で解が見つかってきた。最近になって、物質を含み、さまざまな曲率をとり、一般の理論パラメーターに対して存在する広いクラスの解が発見された [4]。この解は加速膨張を示し、観測結果をうまく説明する可能性がある。本発表では bigravity の ghost-free な作用から出発してこの解を導出し、それがもつ性質について議論する。

2 Analysis

基礎方程式

以下では光速 $c = 1$ の単位系を用いる。Bigravity では、時空に 2 つの計量 $g_{\mu\nu}$ と $f_{\mu\nu}$ が備わっており、それぞれが場の方程式に従っていると考える。四脚場 e^{μ}_{A}, ω^{A}_{μ} を用いて

$$g^{\mu\nu} = \eta^{AB} e^{\mu}_{A} e^{\nu}_{B},\ f_{\mu\nu} = \eta_{AB}\omega^{A}_{\mu}\omega^{B}_{\nu}, \tag{1}$$

$(\eta_{AB} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1))$ と表すと、ghost-free な作用は次のように書ける [4]：

$$S = -\frac{1}{16\pi G}\int R\sqrt{-g}d^4x - \frac{1}{16\pi \mathcal{G}}\int \mathcal{R}\sqrt{-f}d^4x + S_{\mathrm{int}} + S_{\mathrm{m}}.$$

ここで $R(\mathcal{R}), G(\mathcal{G})$ はそれぞれ $g_{\mu\nu}(f_{\mu\nu})$ のスカラー曲率、重力定数で、S_m は物質場の作用である。$S_{\rm int}$ は 2 つの計量の相互作用であり、gravition に質量を与える。その形は

$$
\begin{aligned}
S_{\rm int} =& \frac{\sigma}{8\pi G}\int \mathcal{L}_{\rm int}\sqrt{-g}d^4x,\\
\mathcal{L}_{\rm int} =& \frac{1}{2}((K^\mu_\mu)^2 - K^\nu_\mu K^\mu_\nu)\\
&+\frac{c_3}{3!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\sigma}K^\mu_\alpha K^\nu_\beta K^\rho_\gamma\\
&+\frac{c_4}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}K^\mu_\alpha K^\nu_\beta K^\rho_\gamma K^\sigma_\delta
\end{aligned}
$$

で与えられる。σ は相互作用の強さ、c_3, c_4 は理論のパラメーターで

$$
K^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu - \gamma^\mu_\nu,\ \gamma^\mu_\nu = e^\mu_A\omega^A_\nu \tag{2}
$$

とおいた。この作用は質量が 0 と $\sqrt{\sigma(1+\mathcal{G}/G)}$ の 2 つの graviton を表す。パラメーター η を $\sigma = m^2\cos^2\eta,\ \mathcal{G} = G\tan^2\eta$ となるように定め、作用を四脚場 $e^\mu_A,\ \omega^A_\mu$ それぞれについて変分すると、$g_{\mu\nu},\ f_{\mu\nu}$ に対する場の方程式が得られる：

$$
G^\mu_\nu = m^2\cos^2\eta T^\mu_\nu + 8\pi G T^{(m)}{}^\mu_\nu, \tag{3}
$$

$$
\mathcal{G}^\mu_\nu = m^2\sin^2\eta\mathcal{T}^\mu_\nu. \tag{4}
$$

$G^\mu_\nu, \mathcal{G}^\mu_\nu$ はそれぞれ $g_{\mu\nu}, f_{\mu\nu}$ についての Einstein テンソルであり、

$$
T^\mu_\nu = \tau^\mu_\nu - \delta^\mu_\nu\mathcal{L}_{\rm int},\ \mathcal{T}^\mu_\nu = -\frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{-f}}\tau^\mu_\nu, \tag{5}
$$

および

$$
\begin{aligned}
\tau^\rho_\lambda =& (\gamma^\sigma_\sigma - 3)\gamma^\rho_\lambda - \gamma^\rho_\sigma\gamma^\sigma_\lambda - \frac{c_3}{2}\varepsilon_{\lambda\mu\nu\sigma}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\sigma}\gamma^\rho_\alpha K^\mu_\beta K^\nu_\gamma\\
&-\frac{c_a}{6}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\gamma^\rho_\alpha K^\mu_\beta K^\nu_\gamma K^\sigma_\delta
\end{aligned} \tag{6}
$$

である。$T^{(m)}{}^\mu_\nu$ は物質のエネルギー運動量テンソルである。

一様等方宇宙の方程式

完全流体の下での一様等方な解を見つける。極座標 (t, r, θ, φ) をとり、スケール因子を $A(t)$、曲率 $k = 0, 1, -1$ に従って $f_k(r) = r, \sin r, \sinh r$ とし、エネルギー運動量テンソルを $8\pi G T^{(m)} = \mathrm{diag}(\rho(t), -p(t), -p(t), -p(t))$ と表す。このとき一般的に、四脚場は $t,\ r$ の関数 $a,\ b,\ c,\ u$ を用いて

$$
\begin{aligned}
e_0 =& \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial t},\ e_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial r},\\
e_2 =& \frac{1}{Af_k}\frac{\partial}{\partial\theta},\ e_3 = \frac{1}{Af_k\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi},\\
\omega^0 =& aAdt + cAdr,\ \omega^1 = -cAdt + bAdr,\\
\omega^2 =& uAf_kd\theta,\ \omega^3 = uAf_k\sin\theta d\varphi,
\end{aligned}
$$

と書ける。これらから (1), (2), (5), (6) を用いて $\gamma^\mu_\nu,\ \tau^\mu_\nu,\ T^\mu_\nu$ が計算できる。その結果、$\tau^\theta_\theta = \tau^\varphi_\varphi$ 従って $T^\theta_\theta = T^\varphi_\varphi,\ \mathcal{T}^\theta_\theta = \mathcal{T}^\varphi_\varphi$ であることが導かれる。

一様等方時空では Einstein テンソルと物質のエネルギー運動量テンソルが対角的であることから、$T^\mu_\nu,\ \mathcal{T}^\mu_\nu$ 従って τ^μ_ν も対角的である。τ^t_r の表式から u の形が決まり、それを代入すると $T^t_t = T^r_r (=: \lambda),\ \mathcal{T}^t_t = \mathcal{T}^r_r (=: \tilde{\lambda})$ となることがわかる。

式 (3) に共変微分を作用させると、Bianchi 恒等式と物質のエネルギー運動量保存により $\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0$ が得られる。空間成分は自明であり、時間成分から

$$
\nabla_\mu T^\mu_t = 2\frac{\dot{A}}{A}(T^t_t - T^\theta_\theta) = 0
$$

となる。$T^t_t = T^r_r,\ T^\theta_\theta = T^\varphi_\varphi$ と併せると $T^\mu_\nu = \lambda\delta^\mu_\nu$ と書け、$T^t_t,\ T^\theta_\theta$ の具体的な表式からパラメーターの満たすべき条件

$$
[c_3u - u - c_3 + 2][(u-a)(u-b) + c^2] = 0
$$

が導かれる。前者が 0 になる場合は理論のパラメーター c_3 に制約がつくため、ここでは後者が 0 になる場合を扱う。$\mathcal{T}^\mu_\nu$ についても同様に考えると $\mathcal{T}^\mu_\nu = \tilde{\lambda}\delta^\mu_\nu$ が言える。得られる拘束条件は T^μ_ν のものと同等である。

定数 $\Lambda = m^2\lambda\cos^2\eta,\ \tilde{\Lambda} = m^2\tilde{\lambda}\sin^2\eta$ を導入すると、解くべき方程式は

$$
G^\mu_\nu = \Lambda\delta^\mu_\nu + 8\pi G T^{(m)}{}^\mu_\nu, \tag{7}
$$

$$
\mathcal{G}^\mu_\nu = \tilde{\Lambda}\delta^\mu_\nu, \tag{8}
$$

および拘束条件

$$
(u-a)(u-b) + c^2 = 0 \tag{9}
$$

に帰着する。

一様等方宇宙解

$g_{\mu\nu}$ の従う方程式は、graviton の質量に由来する項 Λ によって、正の宇宙項をもつ Einstein 方程式と同じ形をしている。この式を解くと加速膨張が生じる FLRW 計量が得られる。一方 $f_{\mu\nu}$ は de Sitter 時空となる。拘束条件があるが、$g_{\mu\nu}$ の曲率が正、0、負いずれの場合も $f_{\mu\nu}$ の解が存在することが示される。この解には massive gravity での宇宙論的解が $\eta \to 0$ の極限の特別な場合として含まれており、知られていた解を内包する一般的な宇宙論的解が得られた。

3 Conclusion

Ghost-free な bigravity 理論において一様等方宇宙モデルの厳密解を得た。この解は物質を含み、曲率が正、0、負の時空をすべて表し、一般の理論パラメーターにわたる。Graviton の質量によって宇宙項に相当する項が方程式に現れ、加速膨張が自然に起こる仕組みになっている。理論パラメーターの値を適切に決めることができれば、宇宙項を導入することなく観測事実を説明できる可能性がある。

Reference

[1] D. G. Boulware and S. Deser, *Phys. Rev.* **D6** (1972) 3368.

[2] C. de Rham, G. Gabadadze and A. J. Tolley, *Phys. Rev. Lett.* **106** (2011) 231101.

[3] S. F. Hassan and R. A. Rosen, *JHEP* 1202 (2012) 126.

[4] M. S. Volkov, *Phys. Rev.* **D86** (2012) 061502.