Hořava-Lifshitz gravity で考える重力崩壊

池田　大志 (名古屋大学大学院物理学教室, 重力/素粒子的宇宙論研究室)

Abstract

projectability と任意の結合定数 λ を持つ Hořava-Lifshitz 重力で球対称流体の重力崩壊を考える。そのためにまず星の表面での junction 条件を ill-definned な項が現れないように与える。その後一様等方な完全流体で重力崩壊を考える。その際星の外部の領域は静的時空を仮定する。考える完全流体を圧力がないものだとして、運動方程式、拘束条件、junction 条件を考えると $\lambda = 1$ の時のみ条件を満たすことがわかる。このとき外部の時空は Schwartzschild (anti) de Sitter 解になることがわかる。

1 Introduction

Hořava-Lifshitz(HL) 重力は近年量子重力理論の一つのモデルとして研究されている。このモデルによると、高エネルギー領域では Lorentz 対称性が破れ時間と空間の対称性が破れることになる。このように時間と空間を対等に扱わない理由は理論の繰り込み可能性と unitary 性にある。今 Lorentz 不変な理論でかつ、UV 領域で主要になる項が power counting で繰り込み可能になるために Lagrangian の中に高階微分の項を入れる。すると時間と空間の対称性から時間の高階微分の項が入ることになるが、この項が理論の unitary 性を壊してしまうことが知られている。つまり繰り込み可能で unitary な重力理論を考えようとすると Lorentz 不変性が破れた理論が必要になってくる。Lorentz 不変性が UV 領域で破れるとき、時間と空間の非等方性が出てきて、時間と空間のスケール変換で

$$x \to lx \quad t \to l^z t \tag{1}$$

となる。3+1 次元時空の HL 重力は $Z \geq 3$ であれば (単純な次元解析の意味で) 繰り込み可能である。今回は $z = 3$ の場合を考える。IR 領域で理論が $z = 1$ となり、Lorentz 不変性があらわれることが期待される。

general covariant な HL 重力で projectability$N = N(t)$ と任意の結合定数 λ を持つ理論で重力崩壊を考える。この理論は $U(1) \ltimes Diff(M, F)$ の対称性を持つ理論である。(ここで $\ltimes$ は群の半直積の意味で以下のように定義される。:群 G の正規部分群 H と G の部分群 K があって、$G = HK$ かつ $H \cap K = \{e\}$ を満たすとき G を H と K の半直積といい $G = K \ltimes H$ または $G = H \rtimes K$ と書く。) Hořara が提案した当初は対称性は $Diff(M, F)$ だった。この最初の理論では Minkowski のバックグランドで spin0 モードが現れて、不安定であることがわかった。また spin0 モードに関わる問題として強結合の問題や重力 sector で伝搬速度が異なる問題なども出てきた。そこで spin0 モードを取り除くため U(1) 対称性を課すことが提案された。量子重力理論が量子効果によって重力崩壊による特異点形成を阻止してくれることが期待されていることからこのような理論で重力崩壊を考えることには意味がある。ただし今回はあくまで古典論で重力崩壊を考えその性質を調べることにする。この集録では紙面の都合上で最低限必要な式以外は省略する。必要があれば参考文献 [Greenwald et al (2013)] を参照して欲しい。

2 General Covariant な HL 重力

ここで考える理論モデルを簡単にまとめておく。力学変数は $(N, N^i, g_{ij}, A, \phi)$ である。(ここで i, j は空間の添字) 理論に以下の対称性を課す。

$Diff(M,F)$ 対称性

$$\begin{aligned}
&\delta N = \zeta^k \nabla_k N + \dot{N} f + N \dot{f} \\
&\delta N_i = N_k \nabla_i \zeta^k + \zeta^k \nabla_k N_i + g_{ik} \dot{\zeta}^k + \dot{N}_i f + N_i \dot{f} \\
&g_{ij} = \nabla_i \zeta_j + \nabla_j \zeta_i + f \dot{g_{ij}} \\
&\delta A = \zeta^i \partial_i A + \dot{f} A + f \dot{A} \\
&\delta \varphi = f \dot{\phi} + \zeta^i \partial_i \varphi
\end{aligned} \tag{2}$$

$U(1)$ 対称性

$$\begin{aligned}
&\delta_\alpha A = \dot{\alpha} - N^i \nabla_i \alpha \quad \delta_\alpha \varphi = -\alpha \\
&\delta_\alpha N = \nabla_i \alpha \quad \delta_\alpha g_{ij} = 0 \\
&\delta_\alpha N = 0
\end{aligned} \tag{3}$$

全体の作用は以下の通り。

$$S = \zeta^2 \int dt d^3 x N \sqrt{g} (\mathcal{L}_K - \mathcal{L}_V - \mathcal{L}_\phi - \mathcal{L}_A - \mathcal{L}_\lambda + \zeta^{-2} \mathcal{L}_M) \tag{4}$$

ここで $g = det(g_{ij})$ で主要な Lagrangian は以下の通り。

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_K = K_{ij} K^{ij} - \lambda K^2 \\
&\mathcal{L}_\varphi = \varphi \mathcal{G}^{ij} (2K_{ij} + \nabla_i \nabla_j \varphi) \\
&\mathcal{L}_A = \tfrac{A}{N} (2_{\Lambda_g} - R) \\
&\mathcal{L}_\lambda = (1-\lambda)((\nabla^2 \varphi)^2 + 2K \nabla^2 \varphi)
\end{aligned} \tag{5}$$

またここで

$$\begin{aligned}
&K_{ij} = \tfrac{1}{2N} (-\dot{g}_{ij} + \nabla_i N_j + \nabla_j N_i) \\
&\mathcal{G}_{ij} = R_{ij} - \tfrac{1}{2} g_{ij} R + \Lambda_g g_{ij}
\end{aligned} \tag{6}$$

さらに

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_V = \quad & \zeta^2 g_0 + g_1 R + \zeta^{-2} (g_2 R^2 + g_3 R^{ij} R_{ij}) \\
& + \zeta^{-4} (g_4 R^3 + g_5 R R_{ij} R^{ij} + g_6 R^i_j R^j_k R^k_i) \\
& + \zeta^{-4} (g_7 R \nabla^2 R + g_8 (\nabla i R_{jk} \nabla^i R^{jk})
\end{aligned} \tag{7}$$

である。IR 領域で一般相対論を再現するため

$$g_1 = -1 \quad \zeta^2 = \frac{1}{16\pi G} \tag{8}$$

ととる。(G は重力定数) また $\mathcal{L}_M$ は物質の Lagrangian 密度である。さらに $\Lambda \equiv \frac{1}{2}\zeta^2 g_0$ とする。以上が今回考える作用である。
この作用で g_{ij} について変分をとると運動方程式が出てくる。また $N(t)$,N^i について変分をとるとそれぞれ Hamiltonian 拘束条件、super-momentum 拘束条件が出てくる。また φ,A について変分をとっても拘束条件が出てくる。
これらの式の導出の際に物質と g_{ij},φ,N,N_i,A との結合を特徴づける以下の量が出てくる。

$$\begin{aligned}
&J^i \equiv -N \tfrac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta N_i} \quad J_\varphi \equiv -\tfrac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta \varphi} \\
&J_A \equiv 2 \tfrac{\delta (N \mathcal{L}_M}{\delta A} \quad \tau^{ij} \equiv \tfrac{2}{\sqrt{g}} \tfrac{\delta (\sqrt{g} \mathcal{L}_M)}{\delta g_{ij}}
\end{aligned} \tag{9}$$

これらの量は保存則を満たす。
一般相対論で定義される 4 次元エネルギー運動量テンソルに相当するのは

$$g^{(4)}_{00} = -N^2 + N^i N_i, g_{0i} = N_i, g^4_{ij} = g_{ij} \tag{10}$$

としたときの

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g^{(4)}}} \frac{\delta(\sqrt{(-g^{(4)}} \mathcal{L}_M}{\delta g^{(4)}_{\mu\nu}} \tag{11}$$

である。例えば相対論的極限で J^t は $-\rho_H$ となる。(ρ_H は物質のエネルギー密度)

3 球対称時空

球対称な時空を考える。座標は球座標 (r,θ,ϕ) をとる。このとき N, N_i, g_{ij} は以下のようにかける。

$$\begin{aligned}
N = 1 \quad N^i = \delta^i_r e^{\mu(r,t) - \nu(r,t)} \\
g_{ij} dx^i dx^j = e^{2\nu(r,t)} dr^2 + r^2 d\Omega^2
\end{aligned} \tag{12}$$

また U(1) 変換の自由度を使って $\varphi = 0$ とできる。さらに球対称性から

$$J^i \equiv e^{-(\mu+\nu)} (v, 0, 0) \tag{13}$$

とおけ、

$$\tau_{ij} = e^{2\nu} p_r \delta^r_i \delta^r_j + r^2 p_\theta \Omega_{ij} \tag{14}$$

とできる。この式を先の運動方程式と拘束条件に代入すると μ, ν の時間発展と満たすべき拘束条件が得られる。

4 Junction 条件

星の重力崩壊を考えるにあたって星の表面上での力学変数の接続条件を考える。まず星の外部を M^+、

内部を M^-、表面を Σ とする。M^+ と M^- の領域をあわせて M とする。また時刻 t での星の半径を $\mathcal{R}(t)$ とかく。$\Phi(t,r) \equiv r - \mathcal{R}(t)$ とすると星の表面の方程式は $\Phi(t,r) = 0$ となる。
M 上の関数 F は以下の形にかけると考えられる。

$$F = F^+ H(\Phi) + F^-(1 - H(\Phi)) + \sum_{k=0}^{n} F^{Im(k)} \delta^{(k)}(\Phi) \tag{15}$$

ここで

$$H(\Phi) = \begin{array}{ll} 1 & (\Phi > 0) \\ 1/2 & (\Phi = 0) \\ 0 & (\Phi < 0) \end{array} \tag{16}$$

で Heaviside 関数である。また F^+ と F^- は各々M^+ と M^- 上の滑らかな関数である。各々の M 上の関数 μ や ν が式 (15) のような形でかけると考えられる。そこでまず前節で求めた場の方程式で式が well-defined になるように Σ 上での μ、ν 振る舞いを決める。方程式を立てたときに $\delta^2(\Phi)$ などのような ill-defined な項が出ないためには次のように設定すればよい。

1. μ,ν は Σ を除いて M^+,M^- 上で C^5 関数
2. μ は Σ をまたぐ際には C^0 関数
3. ν は Σ をまたぐとき t については C^0,r については C^2 関数

このとき μ と ν は以下のようにかける。

$$\begin{aligned} \mu &= \mu^D = \mu^+ H(\Phi) + \mu^-(1 - H(\Phi)) \\ \nu &= \nu^D = \nu^+ H(\Phi) + \nu^-(1 - H(\Phi)) \end{aligned} \tag{17}$$

ここで μ^+ と ν^+ は M^+ 上の C^5 関数、μ^- と ν^- は M^- 上の C^5 関数である。さらにこれと場の方程式を使うことで Junction 条件が出てくる。

5 一様な完全流体の重力崩壊

一様な完全流体中の metric は次のようにかけることが知られている。

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{d\bar{r}^2}{1 - k\bar{r}^2} + \bar{r}^2 d\Omega^2\right) \tag{18}$$

これと式 (12) を比べる。

$$\begin{aligned} \nu^-(t,r) &= -\tfrac{1}{2} ln\left(1 - k\tfrac{r^2}{a(t)^2}\right) \\ \mu^-(t,r) &= ln\left(\tfrac{-\dot{a}(t)r}{\sqrt{a^2(t) - kr^2}}\right) \end{aligned} \tag{19}$$

ここで $r = a(t)\bar{r}$ の対応がある。完全流体として特に $p_\theta^- = p_r^- = p^-(t)$,$v = 0$ となるものを考える。ν に対する各々の変数の junction 条件から $k = 0$ となる。このとき

$$\nu^-(t,r) = 0 \quad \mu^-(t,r) = ln(-rH) \tag{20}$$

となる。($H \equiv \dot{a}(t)/a(t)$) あとは運動方程式と拘束条件と junction 条件を使って、各々の変数の時間発展を求める。今回は簡単のため $\Lambda_g^- = 0$,$\Lambda_g^+ = 0$ とする。以下では $\lambda = 1$ と $\lambda \neq 1$ で場合分けして考え、簡単に結論のみを述べる。

5.1 $\lambda = 1$ の場合

$\lambda = 1$ の場合には静的真空球対称な (外部) 解は

$$\begin{aligned} \mu^+ = \mu^+(r) = \; & \tfrac{1}{2} ln\left(\tfrac{2m^+}{r} + \tfrac{1}{3}\Lambda r^2 - 2A^+(r) \right. \\ & \left. + \tfrac{2}{r}\int_{r_0}^{r} A^+(r')dr'\right) \\ \nu^+ = 0 \; & \end{aligned} \tag{21}$$

ここで m^+ と r_0 は定数で A^+ は関数形は決まっていない r のみの関数である。内部の流体の圧力は 0 とする。

$$p_r^- = p_\theta^- = 0 \tag{22}$$

このとき運動方程式の解は

$$a(t) = \begin{array}{ll} a_0 cosh^{2/3}\left(\frac{\sqrt{3\Lambda}(t - t_0)}{2}\right) & \Lambda \neq 0 \\ a_0 (t - t_0)^{2/3} & \Lambda = 0 \end{array} \tag{23}$$

となる。ここで a_0 と t_0 は定数である。
$\Lambda > 0$ のときには

$$\mathcal{R}(t) = \mathcal{R}_0 cosh^{2/3}\left(\frac{\sqrt{3\Lambda}}{2}(t_0 - t)\right) \tag{24}$$

また

$$A(t,r) = A_0 \tag{25}$$

ここで A_0 はある定数。K の外部解は

$$K^+(r) = e^{\mu^+(r)}\left(\mu^+_{,r}(r) + \frac{2}{r}\right) \tag{26}$$

となる。さらに

$$\mu^+ = \frac{1}{2}ln(\frac{2M}{r} + \frac{\Lambda r^2}{3}) \tag{27}$$

が得られる。($M = -\Lambda\mathcal{R}_0^3 6$) これは質量 $M < 0$、宇宙定数 Λ の Schwartzschild-de Sitter 解そのものである。$t < t_0$ で dust は収縮し $t \to t_0$ で $\mathcal{R}(t) \to \mathcal{R}_0$ となり、$K^+ \to \infty$ となる。
$\Lambda < 0$ の場合を述べる。このときには

$$\mathcal{R}(t) = \mathcal{R}_0 cos^{2/3}(\frac{\sqrt{3\|\Lambda\|}}{2}(t - t_0)) \tag{28}$$

となる ($\mathcal{R}_0$ は定数) また μ^+ は

$$\mu^+ = \frac{1}{2}ln(\frac{2M}{r} - \frac{\|\Lambda\|}{3}r^2) \tag{29}$$

となる。($M \equiv \|\Lambda\|\mathcal{R}_0^3/6$) これは Schwartzschild-anti-de Sitter 解そのものである。μ が実数であるために $r \leq \mathcal{R}_0$ が条件になる。$r = \mathcal{R}_0$ で K^+ が発散する。よって $r \leq \mathcal{R}_0$ を満たす範囲内で場の方程式や拘束条件、junction 条件は満たされる。$t = t_s \equiv t_0 + \pi/\sqrt{3\|\Lambda\|}$ で $\mathcal{R}t_s = 0$ となり星は中心の特異点に崩壊する。
$\Lambda = 0$ の場合には

$$\mathcal{R}(t) = \mathcal{R}_0(t_0 - t)^{2/3} \tag{30}$$

となる。($\mathcal{R}_0$ は定数) また

$$\mu^+ = \frac{1}{2}ln(\frac{r_g}{r}), \quad \nu^+ = 0, \quad N^+ = 1 \tag{31}$$

となる。($r_g \equiv 4\mathcal{R}_0^3/9$) これは Painleve-Gullstrrand 座標での Schwartzschild の解そのものである。$t = t_0$ で $\mathcal{R}(t_0) = 0$ となり星は特異点に達する。

5.2 $\lambda \neq 1$ の場合

$a(t)$ に対する運動方程式を考えると時間発展は以下のようになる。

$$a(t) = \begin{array}{ll} a_0 cosh^{2/3}(\omega(t - t_0)) & \Lambda \neq 0, \quad \lambda \neq \frac{1}{3} \\ a_0(t_0 - t)^{2/3} & \Lambda = 0, \quad \lambda \neq \frac{1}{3} \\ a(t)\ arbitrary & \lambda = 0, \quad \lambda = \frac{1}{3} \end{array} \tag{32}$$

ここで $\omega \equiv \sqrt{\frac{3\Lambda}{2(3\lambda - 1)}}$ で、a_0,t_0 は定数である。しかしほかの拘束条件や junction 条件を考えるとこの場合解がないことがわかる。

6 結論

今回は Covariant で projectability を満たす HL 理論を扱った。また星の重力崩壊を考える際に必要となる junction 条件について述べ、それを使って dust の重力崩壊を考えた。その結果、$\lambda = 1$ の時のみ重力崩壊の解がありそのとき外部解は Schwarzschild (anti-)de Sitter 解になった。

Reference

Jared Greenwald Jonatan Lenells ,V.H.Satheeskumar, Anzhong Wang arXiv:1304.1167v1