Bigravity 理論におけるブラックホール解とエントロピー

桂川 大志 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

Bigravity 理論の minimal な模型において、$f_{\mu\nu} = C^2 g_{\mu\nu}$ の条件の下で、静的球対称なブラックホール解を考え、そのエントロピーを評価する。この条件において、consistent な解として Schwarzschild 解があることを示すことができる。ブラックホールのエントロピーを計算では、最近提唱された、作用の表面項に対する Virasoro algebra と central charge を使う方法を用いた。本発表の内容は、(T. Katsuragawa and S. Nojiri. 2013) に基づく。

1 Introduction

量子重力理論の研究の１つの方法として、ブラックホールのエントロピーの研究がある。一般相対性理論において、ブラックホールは温度やエントロピーといった概念を持ち、ブラックホール熱力学と呼ばれるものが存在する。このブラックホールのエントロピーの統計的な起源を調べることで、時空の量子的な性質を理解することができ、量子重力理論の側面を理解することができる。

最近、ブラックホールのエントロピーの計算方法として、作用の表面項に対応する Noether current を用いる新たな方法が提唱された (B. R. Majhi and T. Padmanabhan. 2012)。本発表では、この方法を Bigravity 理論に適用する。Bigravity 理論とは、dynamical な metric を持った、ghost-free な nonlinear massive gravity である (S. F. Hassan and R. A. Rosen. 2011)。この重力理論では、graviton に対応する massless spin-2 の場に加えて、massive spin-2 の場が現れる。故に、Bigravity 理論におけるブラックホール解を考えることで、horizon 近傍にある massive spin-2 の場が、ブラックホールに対して、どのような影響を及ぼすのかを知ることができる。

2 Black hole solution for bigravity

Bigravity 理論は、２つの metric $g_{\mu\nu}$ と $f_{\mu\nu}$ を持ち、graviton に対応する massless spin-2 の場と、massive spin-2 の場を持つ。Bigravity の作用は、次のように与えられる。

$$
\begin{aligned}
&S_{\text{bigravity}} \\
&= M_g^2 \int d^4x\sqrt{-g}R(g) + M_f^2 \int d^4x\sqrt{-f}R(f) \\
&+2m_0^2 M_{\text{eff}}^2 \int d^4x\sqrt{-g}\sum_{n=0}^{4}\beta_n e_n\left(\sqrt{g^{-1}f}\right) \quad (1)
\end{aligned}
$$

ここで、$R(g)$ と $R(f)$ は、それぞれ $g_{\mu\nu}$ と $f_{\mu\nu}$ からなるリッチスカラーである。また、M_{eff} は以下のように定義される。

$$
\frac{1}{M_{\text{eff}}^2} = \frac{1}{M_g^2} + \frac{1}{M_f^2} \tag{2}
$$

$\sqrt{g^{-1}f}$ は $g^{\mu\rho}f_{\rho\nu}$ の２乗根であり、

$$
\left(\sqrt{g^{-1}f}\right)^{\mu}{}_{\rho}\left(\sqrt{g^{-1}f}\right)^{\rho}{}_{\nu} = g^{\mu\rho}f_{\rho\nu} \tag{3}
$$

を満たす。また、一般のテンソル $X^{\mu}{}_{\nu}$ に対して、$e_n(X)$ は次のように定義される。

$$
\begin{aligned}
&e_0 = 1,\ e_1 = [X],\ e_2 = \frac{1}{2}\left([X]^2 - [X^2]\right), \\
&e_3 = \frac{1}{6}\left([X]^3 - 3[X][X^2] + 2[X^3]\right), \\
&e_4 = \frac{1}{24}\left([X]^4 - 6[X]^2[X^2] + 3[X^2]^2\right. \\
&\quad \left. + 8[X][X^3] - 6[X^4]\right), \\
&e_k = 0 \quad \text{for} \quad k > 4 \qquad (4)
\end{aligned}
$$

ここで、$[X]$ はテンソルのトレースを表す。

minimal な模型の作用は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} & S_{\mathrm{bigravity}} \\ & = M_g^2 \int d^4x\sqrt{-g}R(g) + M_f^2 \int d^4x\sqrt{-f}R(f) \\ & +2m_0^2 M_{\mathrm{eff}}^2 \int d^4x\sqrt{-g} \\ & \times \left(3 - \mathrm{tr}\sqrt{g^{-1}f} + \det\sqrt{g^{-1}f}\right) \end{aligned} \tag{5}$$

また、対応する係数 β_n は以下の通りである。

$$\beta_0 = 3,\ \beta_1 = -1,\ \beta_2 = 0,\ \beta_3 = 0,\ \beta_4 = 1 \tag{6}$$

$g_{\mu\nu}$ と $f_{\mu\nu}$ について、(5) の変分をとり、さらに、定数 C として $f_{\mu\nu} = C^2 g_{\mu\nu}$ という条件を課すと、2 つの運動方程式は以下の形になる。

$$0 = R_{\mu\nu}(g) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R(g) + \Lambda_g g_{\mu\nu}\,, \tag{7}$$

$$0 = R_{\mu\nu}(f) - \frac{1}{2}f_{\mu\nu}R(f) + \Lambda_f f_{\mu\nu}\,. \tag{8}$$

ここで、cosmological constant は次のように定義される。

$$\Lambda_g \equiv 3m_0^2\left(\frac{M_{\mathrm{eff}}}{M_g}\right)^2(|C|-1)\,, \tag{9}$$

$$\Lambda_f \equiv m_0^2\left(\frac{M_{\mathrm{eff}}}{M_f}\right)^2 C^{-4}(|C|-C^4) \tag{10}$$

consistency のためには、これら 2 つの運動方程式が一致する必要がある。$f_{\mu\nu} = C^2 g_{\mu\nu}$ と課すことで、$R_{\mu\nu}(f) = R_{\mu\nu}(g)$、 $R(f) = C^{-2}R(g)$ となるから、

$$\Lambda_g = C^2\Lambda_f \tag{11}$$

よって、C の満たすべき条件は、次のようになる。

$$C^4 + 3M_{\mathrm{ratio}}^2 C^2|C| - 3M_{\mathrm{ratio}}^2 C^2 - |C| = 0 \tag{12}$$

ここで、$M_{\mathrm{ratio}} \equiv M_f/M_g$ と定義した。(12) の解は、$C^2 = 1$ となる。$C^2 = 1$ のとき、(9) と (10) の cosmological constant はゼロになり、2 つの方程式 (7) と (8) は、同じ Schwarzschild 解を持つ。

以上の結果から、$f_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ で cosmological constant がゼロになるときに、Bigravity 理論の minimal な模型おいては、consistent な解を持つことを示すことができた。しかし、異なる係数 β_n を持つ別の模型においては、cosmological constant がゼロにならない、consistent な解を持つ可能性がある。(S. F. Hassan et al. 2012)

3 Black hole entropy from the Noether current

この章では、Majhi、Padmanabhan らによる方法についてまとめる。まず、一般的な表面項について考える。

$$\begin{aligned} I_B &= \frac{1}{16\pi G}\int_{\partial\mathcal{M}} d^{n-1}x\sqrt{\sigma}\mathcal{L}_B \\ &= \frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}} d^n x\sqrt{g}\nabla_a(\mathcal{L}_B N^a) \end{aligned} \tag{13}$$

ここで、N^a は境界 $\partial\mathcal{M}$ に対する単位法ベクトル、$g_{\mu\nu}$ は bulk metric、$\sigma_{\mu\nu}$ は境界での induced metric である。一般の Lagrangian 密度 $\sqrt{g}\mathcal{L} = \sqrt{g}\nabla_a(\mathcal{L}_B N^a)$ に対して、diffeomorphism $x^a \to x^a + \xi^a$ に対する Noether current は、次のように与えられる。

$$J^a[\xi] = \nabla_b J^{ab}[\xi] = \frac{1}{16\pi G}\nabla_b\left[\mathcal{L}_B\left(\xi^a N^b - \xi^b N^a\right)\right] \tag{14}$$

ここで、J^{ab} は Noether potential であり、Noether charge は次のように定義される。

$$Q[\xi] = \frac{1}{2}\int_{\partial\Sigma}\sqrt{h}d\Sigma_{ab}J^{ab}\,. \tag{15}$$

$d\Sigma_{ab} = -d^{n-2}x\,(N_a M_b - N_b M_a)$ は $(n-2)$ 次元表面 $\partial\Sigma$ の面積素であり、h_{ab} はこれに対応する induced metric である。単位法ベクトル N^a と M^b をそれぞれ、spacelike と timelike にとる。さらに、Noether charge に対する Lie bracket を、以下のように定義する。

$$\begin{aligned} [Q_1, Q_2] &= (\delta_{\xi_1}Q[\xi_2] - \delta_{\xi_2}Q[\xi_1]) \\ &= \int_{\partial\Sigma}\sqrt{h}d\Sigma_{ab}\left(\xi_2^a J^b[\xi_1] - \xi_1^a J^b[\xi_2]\right) \end{aligned} \tag{16}$$

次に、ベクトル場 ξ^a について考える。今回の場合、静的球対称なブラックホールを考えているので、metric は以下のような形をしている。

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2\Omega_{ij}(x)dx^i dx^j \tag{17}$$

ここで、$\Omega_{ij}(x)$ は $(n-2)$ 次元空間であり、$h_{ij} = r^2\Omega_{ij}(x)$。また、horizon は、$f(r_h) = 0$ を満たす $r =$

r_h にある。(17) の metric に対して、2 つの単位法ベクトル N^a と M^a は次のように与えられる。

$$N^a = \left(0, \sqrt{f(\rho + r_h)}, 0, \cdots, 0\right) \tag{18}$$

$$M^a = \left(\frac{1}{\sqrt{f(\rho + r_h)}}, 0, \cdots, 0\right) \tag{19}$$

ここで $r = \rho + h_h$ と置くと、horizon 近傍の極限で $\rho \to 0$ となる。この変換の下で、metric は次の形になる。

$$\begin{aligned} ds^2 &= -f(\rho + r_h)dt^2 + \frac{1}{f(\rho + r_h)}d\rho^2 \\ &+ (\rho + r_h)^2\Omega_{ij}(x)dx^i dx^j \end{aligned} \tag{20}$$

さらに、Bondi-like な座標変換を行う。

$$du = dt - \frac{d\rho}{f(\rho + r_h)} \tag{21}$$

このとき、metric は以下のようになる。

$$ds^2 = -f(\rho+r_h)du^2 - 2dud\rho + (\rho+r_h)^2\Omega_{ij}(x)dx^i dx^j \tag{22}$$

次に、horizon の構造を不変に保つようにベクトル場 ξ^a を選ぶ。Killing 方程式を解くと、

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_\xi g_{\rho\rho} = -2\partial_\rho \xi^u = 0, \\ &\mathcal{L}_\xi g_{u\rho} = -\partial_u \xi^u - f(\rho + r_h)\partial_\rho \xi^u - \partial_\rho \xi^\rho = 0 \end{aligned} \tag{23}$$

この方程式の解は次のように与えられる。

$$\xi^u = F(u, x),\ \xi^\rho = -\rho\partial_u F(u, x) \tag{24}$$

$\mathcal{L}_\xi g_{uu} = \mathcal{O}(\rho)$ で、horizon では $\rho \to 0$ であるから、残る条件 $\mathcal{L}_\xi g_{uu} = 0$ は horizon 近傍で自動的に満たされる。これらの結果を元々の座標系 (t, ρ) で表すと、

$$\begin{aligned} &\xi^t = T - \frac{\rho}{f(\rho + r_h)}\partial_t T,\ \xi^\rho = -\rho\partial_t T \\ &T(t, \rho, x) = F(u, x) \end{aligned} \tag{25}$$

となる。これで、任意の T に対するベクトル場 ξ^a が得られたので、charge Q を計算することができる。最後に、T を基底 T_m で展開する。

$$T = \sum_m A_m T_m,\ A_m^* = A_{-m} \tag{26}$$

さらに、T_m によって定義される ξ_m^a と Q_m によって、ξ^a と Q も展開することができる。ξ_m^a が Diff S^1 に isomorphic な代数

$$i\{\xi_m, \xi_n\}^a = (m - n)\xi_{m+n}^a \tag{27}$$

を満たすように、基底 T_m を選ぶ。ここで、$\{,\}$ は Lie bracket である。そのような T_m は以下のようにして選ぶことで得られる。

$$T_m = \frac{1}{\alpha}\exp[im(\alpha t + g(\rho) + p \cdot x)]. \tag{28}$$

ここで、α は定数, p は整数、 $g(\rho)$ は horizon 上で正則な関数である。

4 Entropy for bigravity

前章の方法とブラックホール解を用いて、ブラックホールのエントロピーを評価する。相互作用項は微分項を含まないので、表面項に対する寄与はない。故に、表面項は $R(g)$ と $R(f)$ から出てくる 2 つの Gibbons-Hawking 項になる。

$$\mathcal{L}_B = 2K(g) + 2K(f) \tag{29}$$

ここで、 $K = -\nabla_a N^a$ は境界の外曲率のトレースである。今、$f_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ かつ $f(r) = 1 - \frac{2M}{r}$ であって、horizon は $r_h = 2M$ にある。前章と同様に計算すると、元々の座標系 (t, ρ) でのベクトル場 ξ^a は、次のようになる。

$$\xi^t = T - (\rho + 2M)\partial_t T\,, \quad \xi^\rho = -\rho\partial_t T\,. \tag{30}$$

次に、Noether current と Virasoro algebra を計算していく。horizon に対する法ベクトルは、

$$N^a = \left(0, \sqrt{\frac{\rho}{\rho + 2M}}, 0, 0\right) \tag{31}$$

$$M^a = \left(\sqrt{\frac{\rho + 2M}{\rho}}, 0, 0, 0\right) \tag{32}$$

であり、Gibbons-Hawking 項は、

$$K(g) = K(f) = -\frac{2\rho + M}{\sqrt{\rho}\,(\rho + 2M)^{3/2}}\,. \tag{33}$$

となる。また、horizon 近傍の極限 $\rho \to 0$ での charge Q は次のように与えられる。

$$Q[\xi] = 2 \times \frac{1}{8\pi G} \int_{\mathcal{H}} \sqrt{h} d^2x [\kappa T - \frac{1}{2}\partial_t T] \tag{34}$$

ここで、κ はブラックホールの表面重力 $\kappa = \frac{1}{4M}$ である。最後に、T の展開を考え central charge を計算する。$T = T_m$、T_n に対して、Noether charge Q_m、Q_n の Lie bracket(16) は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} [Q_m, Q_n] &= \frac{1}{4\pi GM} \int_{\mathcal{H}} [\kappa(T_m \partial_t T_n - T_n \partial_t T_m) \\ &- \frac{1}{2}(T_m \partial_n^2 - T_n \partial_m^2) \\ &+ \frac{1}{4\kappa}(\partial_t T_m \partial_n^2 - \partial_t T_n \partial_m^2)\Big] \end{aligned} \tag{35}$$

次に、前章で選んだ T_m (28) を (34) と (35) に代入し、horizon の面積 A での積分を実行すると、次の結果を得る。

$$Q_m = \frac{\kappa A}{4\pi\alpha G} \delta_{m,0} \tag{36}$$

$$\begin{aligned} [Q_m, Q_n] = &-\frac{i\kappa A}{4\pi\alpha G}(m-n)\delta_{m+n,0} \\ &-im^3 \frac{\alpha A}{8\pi\kappa G}\delta_{m+n,0} \end{aligned} \tag{37}$$

故に、この Virasoro algebra の central term は

$$\begin{aligned} K[\xi_m, \xi_n] &= [Q_m, Q_n] + i(m-n)Q_{m+n} \\ &= -im^3 \frac{\alpha A}{8\pi\kappa G}\delta_{m+n,0} \end{aligned} \tag{38}$$

となる。この central term から、central charge C と zero-mode energy Q_0 を読み取ると、

$$\frac{C}{12} = \frac{\alpha A}{8\pi\kappa G},\ Q_0 = \frac{\kappa A}{4\pi\alpha G} \tag{39}$$

Cardy formula を使うことで、エントロピーを得ることができる。

$$S = 2\pi\sqrt{\frac{CQ_0}{6}} = \frac{A}{2G}\,. \tag{40}$$

これは、Einstein gravity における Bekenstein-Hawking entropy の 2 倍である。

5 Conclusion and discussion

今回の発表では、Bigravity 理論の minimal な模型において、まず、静的球対称なブラックホール解が存在することを示した。minimal な模型に対して、ansatz として $f_{\mu\nu} = C^2 g_{\mu\nu}$ を考えたが、最終的に、consistent であるためには $C^2 = 1$ であることがわかり、$f_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ となった。そして、Schwarzschild 解を得ることができ、この場合のエントロピーを評価した。

得られたエントロピーは、Einstein gravity における Bekenstein-Hawking エントロピーの 2 倍になった。これは、2 つのテンソル場 $f_{\mu\nu}$ and $g_{\mu\nu}$ に対する表面項が一致し、Noether current に対して同じ寄与を持つためである。今回の発表では、Schwarzschild ブラックホールのエントロピーのみを計算したが、Kerr ブラックホールもまた解になる。しかし、この場合も $f_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ になるので、エントロピーは Einstein gravity の場合の 2 倍になる。

今回の発表のアプローチを一般化して、他の模型に当てはめることを考えてみると、他の模型では、Fierz-Pauli mass term を再現するような、異なる β_n をとることができる。そのような場合には、$C^2 \neq 1$ となる consistent な解が存在する可能性があり、cosmological constant がゼロにならないときには、(Anti-)de Sitter-Schwarzschild 解や (Anti-)de Sitter-Kerr 解を持つ。さらに、もし 2 つの場が異なるときには、表面項は Noether current に異なる寄与を与え、エントロピーが変化しうる。

また、表面項に対する Noether current を用いることで、Bigravity 理論におけるブラックホールのエントロピーが、2 つのリッチスカラーから出てくる、2 つのエントロピーの和で与えられることを示すことができた。他の研究からも、同様の結果が得られており、ここで得られた結果は、一般的な議論の示唆するところに矛盾しない。

Reference

T. Katsuragawa and S. Nojiri. arXiv:1304.3181 [hep-th].

B. R. Majhi and T. Padmanabhan. Phys. Rev. D **86** (2012) 101501

S. F. Hassan and R. A. Rosen. JHEP **1202** (2012) 126

S. F. Hassan, A. Schmidt-May and M. von Strauss. arXiv:1208.1515 [hep-th]