Kerr spacetime での scalar 場の不安定性と black-hole bomb の解析

米倉 良一 (大阪市立大学大学院 理学研究科)

Abstract

Kerr ブラックホールに入射するスカラー場を考えるとして, 反射波はある条件下で, 入射波よりも増幅される. この現象は superradiant scattering といい, 反射波はブラックホールから回転エネルギーを得る. スカラー場の質量は有効ポテンシャルのように働いて, 束縛状態を作り出す. ポテンシャルに跳ね返されて反射されたスカラー場はブラックホールに再入射する. 再反射と再入射を繰り返すと, スカラー場は不安定になり, 振幅は growth rate を持つようになる. このような現象は black-hole bomb として知られている.

数値計算では, $M\mu = GM\mathcal{M}/c\hbar = O(1)$ で最も growth rate が大きいことが示された. (M はブラックホールの質量, $\mathcal{M}$ はスカラー場の静止質量である.) 本講演では growth rate を解析的に求める.

1 Kerr spacetime

Kerr ブラックホールを表す時空は定常軸対称であり, Boyer-Lindquist 座標を用いると次のようなメトリックで表される.

$$
\begin{aligned}
ds^2 = &-\frac{\Delta - a^2\sin^2\theta}{\Sigma}dt^2 \\
&+\frac{(r^2+a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta}{\Sigma}\sin^2\theta d\phi^2 \\
&-\frac{4Mar\sin^2\theta}{\Sigma}dtd\phi + \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 + \Sigma d\theta^2 \qquad (1)
\end{aligned}
$$

$$\Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2 \qquad (2)$$

$$\Sigma \equiv r^2 + a^2cos^2\theta \qquad (3)$$

$$a \equiv \frac{J}{M} \qquad (4)$$

M, J はブラックホールの質量と角運動量である. この時空における Killing ベクトルは $\xi^a = (\partial_t)^a$ と $\psi^a = (\partial_\phi)^a$ である. 地平面は $\Delta = 0$ になる $r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$ にある. $g_{tt} > 0$ となるような領域を ergo region といい, この領域ではブラックホールによる時空の引きずりによって, 粒子は静止できず角速度を得る. ゼロ角運動量粒子が地平面上で得られる角速度は $\Omega_H = a/2Mr_+$ となり, この量をブラックホールの角速度と呼ぶ.

2 superrradiant scattering

Kerr ブラックホールに対して, $\mathrm{e}^{-i\omega t}\mathrm{e}^{im\phi}$ のようにモード展開されるスカラー場が入射するとする. スカラー場のエネルギー運動量テンソルは

$$
\begin{aligned}
T_{ab} &= (\triangledown_a\Psi)(\triangledown_b\Psi) + g_{ab}\mathcal{L} \\
\mathcal{L} &= -\frac{1}{2}g_{ab}\{(\triangledown^a\Psi)(\triangledown^b\Psi) + \mu^2\Psi^2\} \qquad (5)
\end{aligned}
$$

次のようなエネルギーカレントを定義する.

$$J_a = -T_{ab}\xi^b \qquad (6)$$

このように定義された J^a は, $\triangledown^a J_a = 0$ を満足する. 次のような閉領域 K を考える.

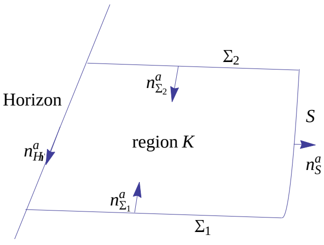

図 1: 閉領域 K

S は $r = \infty$ において timelike に移動する超曲面, $\Sigma_{1,2}$ は地平面と S をつなぐ spacelike な超曲面とする. そして各曲面から外向きに伸びる法線ベクトルを n^a とする. 法線ベクトルの下添え字はどの曲面から

生えているかを表しており, 以下省略する．Gauss's law より

$$\int_K \nabla^a J_a = \int_{H+\Sigma+S} J_a n^a = 0 \tag{7}$$

Σ_2 は Σ_1 の時間並進によって作られる超曲面であり, 時間並進対象性を持つ時空においては, 積分による寄与は打ち消しあうようにして決めることができる．

$$\int_H J_a n^a + \int_S J_a n^a = 0 \tag{8}$$

つまり無限遠方に届くエネルギー量は, 地平面を通って内側に落ち込んでいくエネルギー量の逆符合になる．

実スカラー場のエネルギー運動量テンソルを用いて, 地平面上での積分を考える．地平面の法線ベクトルは時間方向と角度方向の Killing ベクトルを用いて, $n^a = -\xi^a - \Omega_H \psi^a$ のように書ける．被積分関数を計算すると,

$$\begin{aligned} J_a n^a &= -T_{ab}\xi^a n^b \\ &= -(n^a \nabla_a \Psi)(\xi^b \nabla_b \Psi) \end{aligned} \tag{9}$$

$\Psi = Re[\Psi_0(r,t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\mathrm{e}^{im\phi}]$ を代入して時間平均を行うと,

$$\begin{aligned} \langle J_a n^a \rangle &= -\langle (n^a \nabla_a \Psi)(\xi^b \nabla_b \Psi) \rangle \\ &= \frac{1}{2}\omega(\omega - m\Omega_H)|\Psi_0|^2 \end{aligned} \tag{10}$$

$\omega < m\Omega_H$ であれば地平面上での積分は負になるので, 地平面内へと入っていくエネルギーは負になる．したがってブラックホールが受け取るエネルギーは負になり, 無限遠での積分は正になる．このような現象は, superradiant scattering として知られている．

3 Klein-Gordon equation in Kerr spacetime

Kerr ブラックホールがある時空における Klein-Gordon 方程式を調べて, スカラー場 Ψ を求めて振動数 ω の振る舞いを調べる． Ψ を次のようにしてモード展開する．同様に r と θ に関しても変数分離できる．

$$\Psi(t,r,\theta,\phi) = \mathrm{e}^{-i\omega t} R(r) S(\theta) \mathrm{e}^{im\phi} \tag{11}$$

Klein-Gordon 方程式に代入すると, $S(\theta)$ と $R(r)$ がそれぞれ満たす方程式が次のようになる．

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dS}{d\theta}\right) + [a^2(\omega^2-\mu^2)\cos^2\theta \\ -\frac{m^2}{\sin^2\theta} + A]S = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \Delta\frac{d}{dr}\left(\Delta\frac{dR}{dr}\right) + [K^2 - \Delta(a^2\omega^2 - 2ma\omega \\ +\mu^2 r^2 + A)]R = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

$$K^2 \equiv (r^2+a^2)\omega - am$$

S は flat な空間の oblate spheroid 座標で表された Laplace 作用素に対する調和関数であり, A は固有値である．(12) は $a = 0$ の場合には Legendre 陪微分方程式であり, 固有値は $A = l(l+1)$ になる（l は整数）．(12) の第二項の $\cos^2$ 項は $\omega \approx \mu$ の場合には, Legendre 陪微分方程式に対する摂動項とみなすことができるので, 固有値は次のように書ける．

$$A = l(l+1) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k a^{2k}(\mu^2-\omega^2)^k \tag{14}$$

R について調べる．$dr* = [(r^2+a^2)/\Delta]dr$ のような座標変換と, $R = u/\sqrt{r^2+a^2}$ のような従属変数変換を行うと, $r \to \infty$ の遠方では方程式 (13) は次のような Schrodinger 型の方程式に書かれる．

$$-\frac{d^2u}{dr*^2} + (\mu^2 - \omega^2 + O(1/r^2))u = 0 \tag{15}$$

無限遠において $R = 0$ となるように境界条件を設定すると, $\omega < \mu$ とならなくてはならない. (15) を解くと次のような解が得られる．

$$R \sim \frac{1}{r}\mathrm{e}^{-\sqrt{\mu^2-\omega^2}r*}$$

(15) においてスカラー場の質量 μ は遠方ではポテンシャル項の主要な部分としての役割を持つことがわかる．したがって, superradiance によって反射された波で $\omega < \mu$ を満たすものは, 再び反射されてブラックホールに再入射する．次に地平面近辺の解を決める．$\Delta \to 0$ で極限をとると, 微分方程式 (13) は以下のようになる．

$$\frac{d^2R}{dr*^2} + (\omega - m\Omega_H)^2 R = 0 \tag{16}$$

独立解は $e^{\pm i(\omega - m\Omega_H)r*}$ だが, 地平面上には ingoing の波しか存在しないので, 群速度が負になる解を選択すると,

$$R \sim e^{-i(\omega - m\Omega_H)r*}$$

のようになる.

以上を持って, 地平面近辺と無限遠方で R に対する境界条件を設定した.

$$R \sim \begin{cases} \frac{1}{r} e^{-\sqrt{\mu^2-\omega^2}r*} & (r \to \infty) \\ e^{-i(\omega - m\Omega_H)r*} & (r \to r_+) \end{cases} \tag{17}$$

4 black-hole bomb : analytical calculation

次のような新しい無次元変数を導入する.

$$x \equiv \frac{r - r_+}{r_+} \quad ; \quad \tau \equiv \frac{r_+ - r_-}{r_+}$$
$$\varpi \equiv \frac{\omega - m\Omega_H}{2\pi T_{BH}} \quad ; \quad k \equiv 2\omega r_+ \tag{18}$$

T_{BH} はブラックホールの温度である. 方程式 (13) を書き換えると,

$$x(x+\tau)\frac{d^2R}{dx^2} + (2x+\tau)\frac{dR}{dx} + VR = 0 \tag{19}$$
$$V \equiv \frac{K^2}{r_+^2 x(x+\tau)} - [a^2\omega^2 - 2ma\omega + \mu^2 r_+^2 (x+1)^2 + A] \tag{20}$$

方程式 (19) を, 条件に応じて解いていく. ブラックホールの回転はほぼ最大であるとするので, $a \approx M$ である. また, 場の角振動数は ω は $\omega \approx \mu, \omega \approx m\Omega_H$ であり, $M\mu \approx O(1)$ とする. (ただし, superradiance 条件 $\omega < m\Omega_H$ は満足される.) すると, 次の条件が満たされる.

$$a \approx M \quad \Rightarrow \quad \tau \ll 1 \tag{21}$$
$$\omega \approx \mu, m\Omega_H \quad \Rightarrow \quad M(m\Omega_H - \omega) \ll 1 \tag{22}$$

微分方程式 (19) を, 遠方領域 $(\max\{\tau, M(m\Omega_H - \omega)\} \ll x)$ と, 地平面近辺 $(x \ll 1)$ の場合で, それぞれを書き下すと次のようになる. ここで遠方というのは $r_+ \ll r$ とは異なる意味を持つ.

- far region

$$x^2\frac{d^2R}{dx^2} + 2x\frac{dR}{dx} + V_{\rm far}R = 0 \tag{23}$$
$$V_{\rm far} = -(\mu^2-\omega^2)r_+^2x^2 - 2(\mu^2 r_+ - \omega k)r_+ x - \beta^2 + \frac{1}{4}$$
$$\beta^2 - \frac{1}{4} \equiv a^2\omega^2 - 2ma\omega + \mu^2 r_+^2 + A$$

- near holizon region

$$x(x+\tau)\frac{d^2R}{dx^2} + (2x+\tau)\frac{dR}{dx} + V_{\rm near}R = 0 \tag{24}$$
$$V_{\rm near} = \frac{(kx + \varpi\tau/2)^2}{x(x+\tau)} - \beta^2 - k^2 + \frac{1}{4}$$

(23), (24) の解は

- far region solution

$$R = C_1(2\sqrt{\mu^2-\omega^2}r_+)^{\frac{1}{2}+\beta}x^{-\frac{1}{2}+\beta}e^{-\sqrt{\mu^2-\omega^2}r_+x} \times M(\frac{1}{2}+\beta, 1+2\beta; 2\sqrt{\mu^2-\omega^2}r_+x) + C_2(\beta \to -\beta) \tag{25}$$

- near holizon region solution

$$R = x^{-\frac{1}{2}\varpi}\left(\frac{x}{\tau}+1\right)^{-i(\frac{1}{2}\varpi - k)} {}_2F_1(\frac{1}{2}+\beta-ik, \frac{1}{2}-\beta-ik, 1-i\varpi; -x/\tau) \tag{26}$$

M は合流型超幾何関数, F は超幾何関数である. $(\beta \to -\beta)$ は第一項の β を逆にしたものを表している.

次にするべきなのは overlap している領域, つまりは $(\max\{\tau, M(m\Omega_H - \omega)\} \ll x \ll 1)$ での解を構成する. far region の解 (25) を $x \ll 1$ に, near horizon region での解 (26) を $\tau \ll x$ に極限をとって, 現れる二つの解が一致しているとすると, 任意係数 $C_{1,2}$ を決定できる. そうして得られた $C_{1,2}$ を用いた far region の解 (25) に対して, $x \to \infty$ の極限をとると R

は次のようになる.

$$
\begin{aligned}
R \to & \Big[C_1(2\sqrt{\mu^2-\omega^2}r_+)^{-\kappa}\frac{\Gamma(1+2\beta)}{\Gamma(\frac{1}{2}+\beta-\kappa)}x^{-1-\kappa} \\
& +C_2(\beta\to-\beta)\Big]\mathrm{e}^{\sqrt{\mu^2-\omega^2}r_+x} \\
& +\Big[C_1(2\sqrt{\mu^2-\omega^2}r_+)^{\kappa}\frac{\Gamma(1+2\beta)}{\Gamma(\frac{1}{2}+\beta+\kappa)}x^{-1+\kappa} \\
& \times(-1)^{-\frac{1}{2}-\beta+\kappa}+C_2(\beta\to-\beta)\Big]\mathrm{e}^{-\sqrt{\mu^2-\omega^2}r_+x}
\end{aligned}
\tag{27}
$$

R がスカラー場の質量 μ による有効ポテンシャルに対する束縛状態であるためには, 境界条件 (17) を課す. したがって $x\to\infty$ で発散する第一項はゼロになる. さらに条件 $\tau \ll 1$ によって $|\varpi|^2 \gg 1$ が課されるので, 最終的には束縛状態であるための条件 (resonance condition) は次のようになる.

$$
\begin{aligned}
(8i)^{2\beta}\Big[\frac{\Gamma(-2\beta)}{\Gamma(2\beta)}\Big]^2 & \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+\beta-ik)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\beta-ik)\Gamma(\frac{1}{2}+\beta-\kappa)} \\
& \times[M^2\sqrt{\mu^2-\omega^2}(m\Omega_H-\omega)]^{2\beta} \\
& = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}+\beta-\kappa)}
\end{aligned}
\tag{28}
$$

場の共鳴は, 波の角振動数が $\omega \approx \mu \approx m\Omega_H$ になる場合に解析的に見積もられる. この条件では (28) の右辺は指数項によって小さくなるとみなすことができる.

$$
\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}+\beta-\kappa)} \approx 0 \tag{29}
$$

ガンマ関数 $\Gamma(z)$ は負の整数値で一意の極を持つので,

$$
\frac{1}{2}+\beta-\kappa=-n \tag{30}
$$

n は非負の整数

β と κ を代入して, $\omega=\omega_R^{(0)}+i\omega_I^{(1)}$ とする. 振動数の虚部は実部に比べて小さいものとする. $M\omega_I^{(1)}$ と $M\mu$ の関係をプロットすると, 次の図のようになる.

ω_I は $M\mu=O(1)$ の時には正の値を持っているので, 場の振幅は指数関数的に増大する.

5 summary

図より $\omega_I^{(1)}$ が最も大きくなる時, $M\mu\approx 0.469$ であり, $M\omega_I^{(1)}\approx 1.7\times10^{-3}$ になることがわかる. したがって, growth rate つまりは場の振幅が e 倍になるための時間は 1.3×10^{-21}sec である.

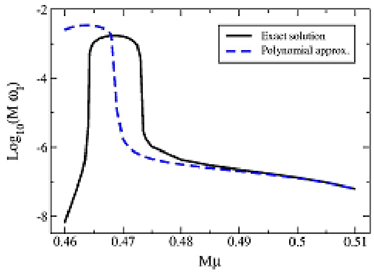

図 2: growth rate

この状況は, 質量が $M=9.3\times10^{12}$kg の原始ブラックホールに, 質量 2.5×10^{-28}kg の中性 π 中間子 π^0 が取り巻いているものと一致する. 通常は π^0 の寿命（元の総数の e^{-1} 倍になる時間）は, $\tau\approx1.3\times10^{-21}$sec であるが, instability による growth rate はそれよりも 10^4 の大きいオーダーなので, π^0 が消滅するよりも速く生成が発生する.

Reference

[1] Shahar Hod, Oded Hod, arXiv:0910.0734 [gr-qc], Phys. Rev. D 81, 061502 (2010)

[2] Dolan, S.R., Phys. Rev. D 76, 084001 (2007).

[3] Press, William H.; Teukolsky, Saul A. Nature 238(5368) 211-212 (1972).