Hawking 輻射とブラックホールの蒸発

山内 健太 (東京理科大学大学院 理学研究科 辻川研究室)

Abstract

Hawking はブラックホールの事象の地平面近傍の量子論を考えることによりブラックホールが周りの空間に黒体輻射をすることを示した．座標中心でブラックホールが生成されるとする．その直前に massless 粒子が侵入して中心を通って反対側に抜け無限遠方まで行くとする．この粒子は，場の理論では，クライン-ゴルドン方程式の解が示す量子場として表される．これを解くことによりブラックホールが温度 $\kappa/2\pi$ の黒体輻射をしていることが示される．Schwarzchild ブラックホール の温度は $T=\frac{\hbar c^3}{8\pi k_B MG}$ となり，これよりブラックホールが蒸発するまでの時間はブラックホールの質量の三乗に比例することが導ける．

1 Introduction

J.D.Bekenstein は熱力学でのエントロピー増大の法則との類似から，ブラックホールもエントロピーをもち，その値はブラックホールの表面積に比例するのではないかと考えた．ブラックホールの熱力学系を考えると，温度や内部エネルギー等の熱力学量が定義されなければならない．一般相対性理論ではブラックホールは何も物質を放出せず吸収するだけであり，ブラックホールが温度を持っているとは考えにくい．もしブラックホールが温度を持つならば，ブラックホールから物質へのエネルギーやエントロピーの移動が起こる．これは事象の地平面で囲まれたものがブラックホールであるという定義やブラックホールの面積定理に反する．しかし S.W.Hawking は，ブラックホールの事象の地平面近傍の量子論を考えることにより，ブラックホールが温度 $\kappa/2\pi$ をもち，周りの空間に黒体輻射をすることを示した．ここでは Hawking が導いた球対称な重力崩壊する時空でブラックホールが黒体輻射する過程についてを見ていく．

2 Hawking radiation

球状の星がある時刻から崩壊していくとする．座標中心でブラックホールが生成し，その直前に massless 粒子が侵入して，中心を通って反対側に抜けて行く状況を考える．この粒子は無限遠方まで行くことができるとする．このとき時空は Schwarzchild 時空であるとする．Schwarzchild 時空は

$$ds^2=-\left(1-\frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2+\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2\right)$$

と表される．

ここでは $c=1$, $G=1$,$\hbar=1$，座標 u, v を

$$u=t-r-2M\ln\left|\frac{r}{2M}-1\right|$$
$$v=t+r+2M\ln\left|\frac{r}{2M}-1\right|$$

とする．粒子は光的無限遠方 $I^-(t\sim-\infty,\ r\sim\infty)$ 上の一点を出発し，ブラックホールが生成される直前に中心を通り抜け，$I^+(t\sim\infty, r\sim\infty)$ へ行く．この粒子はクライン-ゴルドン方程式の解が表す量子場として表される．

クライン-ゴルドン方程式は

$$g_{ij}\partial^i\partial^j\phi=0$$

となる．I^- から入射してくる正振動数解は球対称な場なので

$$f_{\omega'}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\omega'}r}F_{\omega'}e^{-i\omega' v}Y_{lm}(\theta,\phi)$$

となる．ここで，$F_{\omega'}$ は動径方向の微分方程式を満たすものであり，$Y_{lm}(\theta,\phi)$ は表面調和関数である．よって I^- 上では場は f を用いて

$$\phi=\int_0^\infty \mathrm{d}\omega'(a_{\omega'}f_{\omega'}+a^\dagger_{\omega'}f^*_{\omega'})$$

と表される．ここで $a_{\omega'}$, $a^\dagger_{\omega'}$ はそれぞれ I^- で球体の中心に向かう粒子を消滅，生成する演算子である．また，I^+ では，outgoing な正振動数解は

$$p_\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega r}} P_\omega e^{-i\omega u} Y_{lm}(\theta,\phi)$$

となる．場は I^- で完全に記述されているので，事象の地平面の外側の領域では，I^+ と事象の地平面での粒子の情報は決まってしまう．よって I^+ で outgoing な解 p_ω と事象の地平面で incoming な解 q_ω で場を展開したものは先ほどの場と同じになり，

$$\phi = \int_0^\infty \mathrm{d}\omega (b_\omega p_\omega + b^\dagger_\omega p^*_\omega + c_\omega q_\omega + c^\dagger_\omega q^*_\omega)$$

と表される．ここで $b_\omega, b^\dagger_\omega$ は I^+ で outgoing な粒子を消滅，生成する演算子である．I^- においては $f_{\omega'}$ だけで完備なので p_ω および q_ω は $f_{\omega'}$ と $f^*_{\omega'}$ の線形結合で

$$p_\omega = \int_0^\infty \mathrm{d}\omega' (\alpha_{\omega\omega'} f_{\omega'} + \beta_{\omega\omega'} f^*_{\omega'})$$

$$q_\omega = \int_0^\infty \mathrm{d}\omega' (\gamma_{\omega\omega'} f_{\omega'} + \eta_{\omega\omega'} f^*_{\omega'})$$

と表せる．演算子も同様に

$$b_\omega = \int_0^\infty \mathrm{d}\omega' (\alpha^*_{\omega\omega'} a_{\omega'} - \beta^*_{\omega\omega'} a^\dagger_{\omega'})$$

$$c_\omega = \int_0^\infty \mathrm{d}\omega' (\gamma^*_{\omega\omega'} a_{\omega'} - \eta^*_{\omega\omega'} a^\dagger_{\omega'})$$

と表される．$c^\dagger_\omega$ によって生成される粒子は，事象の地平面に落ちて行くので，I^+ へは影響を与えないので除外することができる．I^- における真空状態 $|0_-\rangle$ は，

$$a_\omega|0_-\rangle$$

と定義されているとする．無限遠方にいる観測者にとって状態が始めに $|0_-\rangle$ であれば，十分な時間が経過しても状態が変わらないので，無限遠方にいる観測者の観測する粒子数は

$$\langle 0_-|b^\dagger_\omega b_\omega|0_-\rangle = \int \mathrm{d}\omega' |\beta_{\omega\omega'}|^2$$

となる．p_ω は事象の地平面でデータがゼロである．よって I^+ へ向かう波を，I^+ から逆にたどって I^- に向かうと考えてもよい．崩壊する物体上では有効振動数が非常に大きいため幾何学的近似を用いることができる．重力に捕われずに I^+ にたどり着くのは $v = v_0$ までに I^- を出たものだけである．事象の地平面近傍以外の領域に関しては結果に影響を及ぼさないので無視できる．I^- 上で時間変化する物体の影響を受ける前と後の波を比較する．比較するために I^+ で outgoing な波を I^- へ引き戻して，物体の崩壊の影響を受けた波が I^- でどのようになるかを考える．

事象の地平面の点 x^a 上のベクトル n^a, l^a を考える．l^a は地平面の接線方向のヌルベクトルであり，n^a は地平面の未来方向のヌルベクトルであり，$l^a n_a = -1$ であるとする．事象の地平面近傍で u が一定の値をとる面は，事象の地平面から $-\epsilon n^a$ ずらしたところにある．ϵ は正の微小な数とする．n^a, l^a を事象の地平面の交点まで平行移動する．また，アフィンパラメータとして λ を導入する．λ は事象の地平面の交点で $\lambda = 0, \frac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}\lambda} = n^a$ である．今回アフィンパラメータは

$$\lambda = -Ce^{-\kappa u}$$

と表される．C は一定，κ はブラックホールの表面重力であり，$K^a_{;b}K^b = -\kappa K^a$ と定義されており，K^a は killing ベクトルである．Schwarzschild ブラックホールでは $\kappa = \frac{1}{4M}$ である．幾何光学的近似より I^- まで平行移動しても u が一定の表面と結ばれている間隔は $-\epsilon$ で変わらない．$\lambda n^a = -\epsilon n^a$ となることを用いて

$$u = -\kappa^{-1} \ln \frac{\epsilon}{C}$$

と表される．よって

$$P_\omega\text{の位相} = -\frac{\omega}{\kappa} \ln \frac{\epsilon}{C}$$

となり，ϵ は事象の地平面の近傍の微小な数であるので $\epsilon = v_0 - v$ となり $v < v_0$ の領域で

$$P_\omega\text{の位相} = -\frac{\omega}{\kappa} \ln \frac{v_0 - v}{C},$$

$v > v_0$ の領域ではゼロとなる．よって事象の地平面近傍では

$$p_\omega \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega r}} P^-_\omega e^{-i\frac{\omega}{\kappa}\ln\frac{v_0 - v}{C}}$$

となる．ここで，事象の地平面近傍より $P_\omega(2M) \equiv P_\omega^-$ とした．Bogolubov 係数はフーリエ変換の要領で

$$\alpha_{\omega\omega'} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r(\omega')^{1/2} e^{-i\omega' v} p_\omega(v)\mathrm{d}v$$
$$\beta_{\omega\omega'} = -i\alpha_{\omega(-\omega')}$$

と評価できる．p_ω を用いると

$$|\alpha_{\omega\omega'}|$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left|\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^{1/2}\right| |P_\omega^-| \left|\int_{-\infty}^{v_0} e^{-i\frac{\omega}{\kappa}\ln\frac{v_0-v}{C}} e^{i\omega' v}\mathrm{d}v\right|$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left|\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^{1/2}(-i\omega')^{-1+\frac{i\omega}{\kappa}}\right|\left|P_\omega^-(C)^{\frac{i\omega}{\kappa}}\Gamma\left(1-\frac{i\omega}{\kappa}\right)\right|$$

ω' については，branch cut を下半面に選び，上半分で解析的として

$$(-\omega')^{1/2}(i\omega')^{-1+\frac{i\omega}{\kappa}}$$
$$= (-1)^{1/2}\omega'(-1)^{-1+\frac{i\omega}{\kappa}}(-i\omega')^{-1+\frac{i\omega}{\kappa}}$$
$$= -i\omega'(-i\omega')^{-1+\frac{i\omega}{\kappa}} e^{\frac{-\pi\omega}{\kappa}}$$

となるので，$\alpha_{\omega\omega'}$,$\beta_{\omega\omega'}$ には

$$|\alpha_{\omega\omega'}| = e^{\frac{\pi\omega}{\kappa}}|\beta_{\omega\omega'}|$$

の関係がある．また，Bogolubov 係数の関係式から

$$\int_0^\infty (|\alpha_{\omega\omega'}|^2 - |\beta_{\omega\omega'}|^2)\mathrm{d}\omega' = \Gamma_{\omega l}$$

となる．よって，モードごとの粒子数は

$$N_{\omega l} = \frac{\Gamma_{\omega l}}{e^{\frac{2\pi\omega}{\kappa}} - 1}$$

となる．ここで，

$$T = \frac{\kappa}{2\pi}$$

で定義される温度を導入すると，ブラックホール近傍では常にプランク分布のエネルギーを持った粒子が生成していると結論できる．

3 black hole evaporation

Schwarzschild ブラックホールの表面重力は $\kappa = 1/4M$ であるので，$T = \frac{1}{8\pi M}$ となる．今まで 1 として扱ってきたプランク定数 $\hbar$ と光速 c，重力定数 G を復活させると

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B MG}$$

となる．(k_B はボルツマン定数)

Stefan-Boltzmann の法則より温度 T，半径 r の物体が単位時間あたりに放つエネルギー E は

$$E = \frac{\pi^2 {k_B}^4 T^4}{60\hbar^3 c^2} \times 4\pi r^2$$

となる．また，ブラックホールが単位時間あたりに放つエネルギーを質量の欠損によるものとして

$$-\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{c}E$$

とする．Schwarzschild ブラックホールの半径 $r_g = \frac{2GM}{c^2}$ および，温度 $T = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B MG}$ を代入して

$$-\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{c}\frac{\pi^2 {k_B}^4\left(\frac{\hbar c^3}{8\pi k_B MG}\right)^4}{60\hbar^3 c^2} \times 4\pi\left(\frac{2GM}{c^2}\right)^2$$
$$= \frac{\hbar c^4}{15360\pi M^2 G^2}$$

となる．積分すると

$$M^3 = {M_0}^3 - \frac{\hbar c^4}{5120\pi G^2}t$$

となる．(M_0 は $t = 0$ のときの星の質量）ブラックホールが蒸発するまでの時間は $M = 0$ として

$$t = 5120\frac{\pi G^2}{\hbar c^4}{M_0}^3$$

となりブラックホールの質量の三乗に比例する．

質量が太陽質量 $M_\odot = 1.9884 \times 10^{30} kg$ のブラックホールが蒸発する間での時間は

$$t \sim 10^{74}s \sim 10^{67}[\mathrm{year}]$$

となり，宇宙年齢 1.38×10^{10}[year] よりもはるかに長い時間がかかる．宇宙年齢程度の時間でブラックホールが蒸発するとすればそのブラックホールの質量は

$$M \sim 10^{11} kg$$

程度となる．

4 Conclusion

ブラックホールの事象の地平面近傍の量子論を考えることによって，ブラックホールが温度 $\kappa/2\pi$ の黒体輻射をしていることが示せた．これにより，ブラックホールの蒸発という現象が予想されることがわかった．ブラックホールが蒸発の最後にどのようになるのかを調べるために今後は量子重力理論についても研究していこうと思う．

Reference

[1] S.W.Hawking,"Particle Creation By Black Holes". Commun. Math. Phys. 43, 199 (1975)

[2] S.W.Hawking, "Black hole explosions ?". Nature 248,(1974)

[3] J.D.Bekenstein, "Black Holes and Entropy". Physical Review D, 7, 2333, (1973)