NLSM に従うスカラー場から放出される重力波

堀口　晃一郎 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

宇宙初期のインフレーションの証拠の一つとして scale invariant な重力波があげられる。この重力波はインフレーションが空間の歪みを引き延ばしたものであるが、この過程以外にも scale invariant な重力波が発生する場合がある。それが一様等方な宇宙で Non Linear Sigma Model(NLSM) に従う場合の N 個のスカラー場である [3]。本研究のモチベーションは scale invariant な重力波がインフレーションによるものか NLSM によるものかを区別することである。そのために NLSM の特性とそれに伴う重力波のスペクトルを調べた。また NLSM は場の数が十分大きなときに確かなモデルであって、場の数 N が有限の場合については場の振る舞いを確かめる必要があるため、シミュレーションを用いて確かめた。その結果、場の数が少ない場合についても N 個のスカラー場は NLSM の特性を失わず、このときの重力波のスペクトルは NLSM での重力波のスペクトルと定数倍の関係があることがわかった。以上により NLSM による重力波の解とその振る舞いがわかったので、今後 NLSM の重力波が CMB の C_l に与える影響を調べる。

1 Introduction

NLSM から放出される重力波の特性を知るため、ここでは NLSM と導出される重力波について述べる。

1.1 Non Linear Sigma Model

NLSM とは場の数 N が十分大きい場合、O(N) 対称性を持った場が相転移した後の、場の振る舞いを表すモデルである。ここで $N \leq 3$ では topological defect ができてしまうため、$N > 3$ として考える。このときポテンシャルと、場が満たすべき方程式は

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}\left(\phi^2 - v^2\right)^2 \tag{1}$$

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \phi_a - \frac{\partial V(\phi, T)}{\partial \phi_a} = 0 \tag{2}$$

とで書ける。ここで ϕ_a はスカラー場,a は $1 \sim N$ までの場に対応する添字,ϕ^2 は N 個のスカラー場 ϕ_a の二乗和,λ は結合定数,v は場の真空期待値である。NLSM では相転移を起こして真空に落ちた後の場の物理を考えるので、$\phi^2 = v^2$ として規格化された場 $\beta_a = \phi_a / v$ を考えると、場の運動方程式は $\mathcal{O}(N^{-1})$ の正確さで以下のように書き換えられる。

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \beta_a + (\nabla_\mu \beta_i) \cdot (\nabla^\mu \beta_i)\, \beta_a = 0 \tag{3}$$

これが NLSM に従う N 個のスカラー場が満たすべき方程式である。またこの方程式は一様等方かつ平坦な宇宙の仮定の下 ($ds^2 = a^2(-d\eta^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j)$) で $\mathcal{O}(N^{-1})$ の正確さで解析的に解くことができ、波数空間での解は

$$\beta_a(\mathbf{k}, \eta) = \sqrt{A}\left(\frac{\eta}{\eta_*}\right)^{3/2} \frac{J_\nu(k\eta)}{(k\eta)^\nu} \beta_k^a(\mathbf{k}, \eta_*) \tag{4}$$

$$A = \frac{4\Gamma(2\nu - 1/2)\Gamma(\nu - 1/2)}{3\Gamma(\nu - 1)} \tag{5}$$

となる [1]。η は conformal time で、解は $\gamma = \mathrm{d}\ln a / \mathrm{d}\ln \eta$ が定数の場合有効である。ここで $\nu = \gamma + 1$,A は規格化定数,$\beta_k^a(\mathbf{k}, \eta_*)$ は相転移が終わった時刻での規格化された場の波数空間での分布で、空間的にはランダムである。実空間での解は、(4) をフーリエ変換することで得られる。

1.2 Gravitational wave from NLSM

NLSM に従う場は相転移直後、$N-1$ 次元の field space 上でランダムに分布している。場がホライズンに入ると field space 上で場の配位をそろえ始める。これに伴ってその時刻のホライズンスケールに対応する波数の重力波を放出する。特に輻射優勢期にある

スカラー場が放出した重力波は scale invariant である。まず、metric の揺らぎを以下のように定義する。

$$g_{\mu\nu} = a^2(\eta)\left(\eta_{\mu\nu} + 2h_{\mu\nu}\right) \tag{6}$$

これを用いて、スカラー場をソースとする波数空間でのアインシュタイン方程式は

$$h''_{ij}(\mathbf{k},\eta) + 2\mathcal{H}h'_{ij}(\mathbf{k},\eta) + k^2 h_{ij}(\mathbf{k},\eta) = 8\pi G\Pi_{ij}(\mathbf{k},\eta) \tag{7}$$

と書ける。ここで prime は conformal time での微分である。このとき右辺の量は先の NLSM の解を用いて、

$$\Pi_{ij}(\mathbf{k},\eta) = \Lambda_{ij,lm}(\hat{\mathbf{k}}) \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} q_l q_m \phi_a(\mathbf{q},\eta)\phi_a(\mathbf{k}-\mathbf{q},\eta) \tag{8}$$

とかけ、ここで $\Lambda_{ij,lm}(\hat{\mathbf{k}})$ は traceless transvers part への射影である [1]。また、$\phi_a = v\beta_a$ である。またこの方程式は $\gamma = \mathrm{d}\ln a/\mathrm{d}\ln\eta$ が定数の場合に解け、以下のような解が得られる。

$$h_{ij}(\mathbf{k},\eta) = \frac{8\pi G}{a(\eta)} \int_{\eta_*}^{\infty} d\tau\ \mathcal{G}(\mathbf{k},\eta,\tau) a(\tau) \Pi_{ij}(\mathbf{k},\tau) \tag{9}$$

ここで $\mathcal{G}$ はグリーン関数 [2] で

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(\mathbf{k},\eta,\tau) &= k\eta\tau\left[j_{\gamma-1}(k\tau)n_{\gamma-1}(k\eta)\right. \\ &\quad - \left. n_{\gamma-1}(k\tau)j_{\gamma-1}(k\eta)\right]\end{aligned} \tag{10}$$

j_ν, n_ν はそれぞれ球ベッセル関数と球ノイマン関数である。これを用いて重力波の表式を書くと、

$$\left\langle h_{ij}(\mathbf{k},\eta) h^*_{ij}(\mathbf{q},\eta)\right\rangle = (2\pi)^3 \left|h\right|^2(\mathbf{k},\eta)\delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \tag{11}$$

となり、重力波の sub-horizon scale での各波数のスペクトルは

$$\Omega_{GW}(k,\eta) = \frac{1}{\rho_c}\frac{\mathrm{d}\rho_{GW}(k,\eta)}{\mathrm{d}\ln k} \tag{12}$$

$$= \frac{k^3|h'|^2(k,\eta)}{2(2\pi)^3 G a^2 \rho_c}$$

$$= \frac{k^5|h|^2(k,\eta)}{2(2\pi)^3 G a^2 \rho_c} \tag{13}$$

と書ける。ここで ρ_c は臨界密度である。

2 Simulation

Introduction で述べた場の解 (4) は、場の数 N が十分大きい場合についての解である。そのため場の数が有限のときはシミュレーションにより場の振る舞いを確かめる必要がある。今回、時間発展はリープフロッグ法で記述し、(2) 式を格子シミュレーションを用いて解いた。実際に用いた式は (2) をあらわに書いて

$$a^{-2}\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - \nabla^2\right)\phi_a + \frac{2}{a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\phi_a\right) + \frac{\partial V(\phi)}{\partial\phi_a} = 0 \tag{14}$$

である。このとき、格子数は一辺 64 格子、境界条件としては周期的境界条件を用いた。場の初期条件としては $\phi^2 = v^2$ を満足するよう、$N-1$ 次元 field space 上でランダムな値をとらせた。シミュレーション開始時刻は、各格子点が隣の点と格子点と相互作用していない時刻、つまり開始時のハッブル長が格子点間隔の半分になる時刻とした。また、シミュレーション終了時刻は、境界条件として周期的境界条件を用いたため、各格子点が自分自身と相関を持たないように、ハッブル長がシミュレーションボックスの 1/4 になる時刻とした。ここでは輻射優勢期と物質優勢期に分けてシミュレーションを行った。

重力波が以下の量の二乗に比例するため、以下の量をシミュレーションにより見積もり、NLSM に従う場合と比較した。

$$\langle(\nabla^\mu\beta_i)(\nabla_\mu\beta_i)\rangle = T(\eta) = 3\left(\gamma + \frac{1}{4}\right)a^{-2}\eta^{-2} \tag{15}$$

2.1 Results

(15) 式より以下の値は時間に対して定数になるはずである。

$$a^2\eta^2\langle(\nabla^\mu\beta_i)(\nabla_\mu\beta_i)\rangle = 3\left(\gamma + \frac{1}{4}\right)\left(1 + \mathcal{O}(N^{-1})\right) \tag{16}$$

ここで NLSM の解は $\mathcal{O}(N^{-1})$ で正しいので、NLSM の解の値に対して $\mathcal{O}(N^{-1})$ の不正確さを付け足した。輻射優勢の場合 $\gamma = 1$, 物質優勢の場合 $\gamma = 2$ となるので、NLSM に従う場合 (16) 式の値は輻射優勢期

は 3.75, 物質優勢期は 6.75 となるべきである。そこで輻射優勢、物質優勢それぞれの場合について、場の数 N が 4 ～ 7 の場合で時間に対する (16) 式の値をシミュレーションし図 1,2 に示した。図 1,2 からわかるように輻射優勢、物質優勢どちらの場合も (16) 式の値は時間に対して定数として振る舞っていることがわかる。

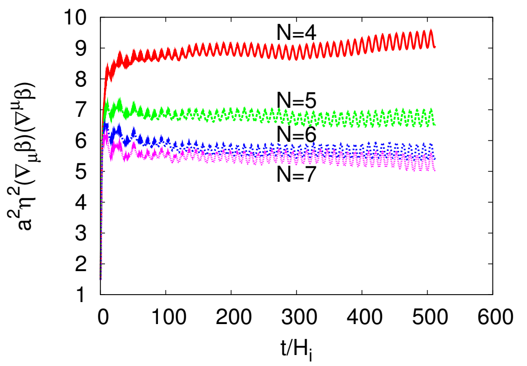

図 1: 輻射優勢の 9realization 平均。

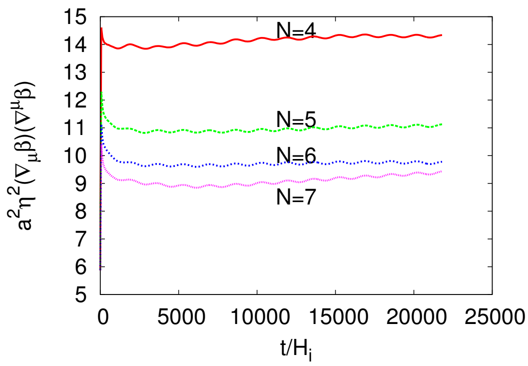

図 2: 物質優勢の 33realization 平均。図 1,2 では x 軸は初期のハッブル時間で規格化された実時間, y 軸は $a^2\eta^2\langle(\nabla^\mu\beta_i)(\nabla_\mu\beta_i)\rangle$ 上から場の数が 4,5,6,7 個の場合となる

シミュレーションにより求めた場の数が N 個の場合の (15) 式の値を $T_N(\eta)$、場が NLSM に従う場合の (15) 式の値を $T(\eta)$ として、その二乗の比

$$\left|\frac{T_N(\eta)}{T(\eta)}\right|^2 \tag{17}$$

を求めた。今回それぞれの場の数 N について (16) 式の値は時間に対して定数となったので、NLSM に従う場合との比である (17) 式も定数となる。以下に (17) 式の値を輻射優勢期と物質優勢期に分けて表として示す。表 1 で N は場の数、rad,mat はそれぞれ輻射優勢期、物質優勢期に対応する。

表 1: 各場の数に置ける $|T_N/T|^2$

$\|T_N/T\|^2$	$N=4$	$N=5$	$N=6$	$N=7$
rad	5.6	3.3	2.4	2.2
mat	4.2	2.6	2.0	1.8

3 Discussion

この節では NLSM から放出される重力波のスペクトルとその立ち上がりの波数、またシミュレーションで見たスカラー場の振る舞いの重力波への影響を議論する。

3.1 Gravitational wave

(13) 式に示した重力波のスペクトルを輻射優勢期については [1] で行われているように、物質優勢期についても解析的に計算して求めた。場の数 N についての重力波の表式は、

$$\Omega_{\rm GW}^{\rm rad}(k,\eta_0) = 5.0\times10^{-3}\frac{1}{N}\cdot\left(\frac{v}{M_{\rm Pl}}\right)^4 \tag{18}$$

$$\Omega_{\rm GW}^{\rm mat}(k,\eta_0) = 6.1\times10^{-2}\frac{1}{N}\cdot\frac{1}{(k\eta_{\rm eq})^2}\cdot\left(\frac{v}{M_{\rm Pl}}\right)^4 \tag{19}$$

ここで $M_{Pl}=1/\sqrt{G}$ でプランク質量, η_0 は現在の conformal time, $\eta_{\rm eq}$ は matter-radiation equality の conformal time. また matter-radiation equality のときの波数 $k_{eq}(k_{\rm eq}\eta_{\rm eq}=1)$ は

$$k_{\rm eq} = 0.022\ {\rm Mpc}^{-1} \tag{20}$$

ここでは $\Omega_{\rm rad}=8.4\times10^{-5}, a_{\rm eq}\sim3000^{-1}$ の値を用いた。このとき重力波のスペクトルは図 3 のように描ける。ここでスペクトルの大きさは場の数と真空期待値によって変わるが、スペクトルの立ち上がりの波数は $\mathrm{sub}-\mathrm{Mpc}^{-1}$ 程度となることがわかる。

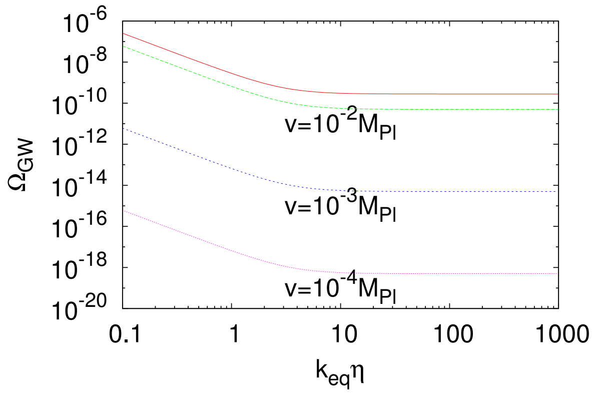

図 3: 場が $N = 4$ の場合の重力波。下から場の真空期待値が $v = 10^{-4}M_{\rm Pl}, v = 10^{-3}M_{\rm Pl}, v = 10^{-2}M_{\rm Pl}$ の場合。最上部は $v = 10^{-2}M_{\rm Pl}$ の場合に対してシミュレーションから得た定数倍を考慮したもの。

3.2 Simulation 結果の考慮

simulation の節で述べた (16) 式の値が有限の場の数 N でも時間に対して定数になることは、場の数が少ない場合でも (15) 式の振る舞いは NLSM に従うということを示している。また、スペクトルの大きさが異なることは式 (15) の値が定数倍されていると見ることができる。表 1 を見ると場の数 N が少ないときの方が NLSM とシミュレーションのずれが大きいことがわかる。この効果は以下の理由により重力波に寄与する。

重力波のスペクトルは (8),(9),(13) 式をみてわかるように、(15) 式の二乗という量を含んでいる。これにより、実際の場の振る舞いと NLSM の場の振る舞いとは (16) 式の値倍の差がある。従って、NLSM での重力波のスペクトルを $\Omega_{\rm GW}(k,\eta_0)$, シミュレーションによる差を含めた重力波を $\tilde{\Omega}_{rmGW}(k,\eta)$ とすると、表式は

$$\tilde{\Omega}_{\rm GW}(k,\eta_0) = \left|\frac{T_N}{T}\right|^2 \Omega_{\rm GW}(k,\eta_0) \qquad (21)$$

とかける。この補正を考えて場の真空期待値が $v = 10^{-2}M_{\rm Pl}$ の場合について重力波のスペクトルを書き換えると図 3 の最上部ようになる。このときスペクトルの振幅は定数倍されて、輻射優勢期と物質優勢期で定数倍の値が違うので立ち上がりの波数に影響する。しかし、この場合も重力波の立ち上がりの波数は sub − $\rm Mpc^{-1}$ 程度となる。

4 Summary & Conclusion

本研究では NLSM の振る舞いの特性と、それによる重力波について見ることができた。

まず、NLSM から導いた重力波のスペクトル (18),(19) は場の真空期待値や場の数によって振幅が変わるが、輻射優勢期の重力波と物質優勢期の重力波の境目は変わらないことがわかった。これを踏まえて、図 3 を見ると場の数や場の真空期待値によらず重力波の立ち上がりの波数は sub − $\rm Mpc^{-1}$ 程度となることがわかる。

次に、場の数が少ない場合についても N 個のスカラー場の振る舞いは、NLSM で得た場の解の振る舞いと類似していることがわかった。さらに、このとき重力波のスペクトルは NLSM で得た重力波のスペクトルに対して定数倍の関係で与えられることがわかった。場の数による NLSM との差は場の数が少ないほど顕著に現れている。図 3 を見ると、このときも重力波の立ち上がりの波数は sub − $\rm Mpc^{-1}$ 程度となることがわかる。

また、(8)(9) 式からわかるように重力波は traceless transverse part のみで寄与する。これは重力波が四重極子の成分しか持っておらず、CMB に対してテンソルモードで寄与することを意味している。今後の目標としては、NLSM の重力波によるメトリック $h_{\mu\nu}$ の一般形 (9) 式が求まったので、これをテンソルモードで展開して、NLSM の重力波が CMB の C_l に与える影響を見積もり、インフレーション由来の重力波との違いを見ていく。

Reference

[1] E.Fenu et al.JCAP 10 005 (2009)

[2] K.Jones-Smith et al.Phys.Rev.Lett.100:131302(2008)

[3] L.M.Krauss et al.PhysRevD.82.044001(2010)