

重力波地上観測の chirp time(合体までの時間)

若松 剛司 (新潟大学大学院 自然科学研究科)

Abstract

重力波は間接的には存在を証明されているが、今だ直接観測されていない。では、直接観測されると何がわかるのか？例えば連星中性子星が接近し合体するまでの時間で重力波が検出された場合を考えてみる。まず、軌道周期と軌道周期の変化率から chirp mass と呼ばれる連星の質量に関する量が決り、観測された振幅から重力波源までの距離が決る。この距離の決定は天文学的な距離の決定とは独立である。宇宙物理学では天文学的对象までの距離がわかることは重要である。

重力波は時空の動的な揺らぎを表している。4重極公式で表現でき、重力波源のエネルギー放出率が導き出せる。重力波の物理を解いて、様子を詳しく記述することは重力波データ解析のテンプレートを作る上で重要な意味を持つ。連星系は重力波のエネルギー損失があるので、軌道は縮小し、最後には合体する。それでは、合体するまでの時間は観測とどのような関係があるのか？重力波を観測する場合、横軸は時間スケールとなる。合体するまでの時間は連星系の初期半径、質量、離心率に依存しているが、ここでは連星の合体するまでの時間 chirp time(t_c) を観測するまでに要するとして、まずは 1yr を基準と考え、地上で観測できる範囲を重ね、観測時間のオーダーを示し、そして、その考察を考える。これは、B.S. Sathyaprakash, Bernard F. Schutz, "Physics, Astrophysics and Cosmology with Gravitational Waves", Living Reviews in Relativity, 12, lrr-2009-2, (2009) のレビューである。

1 イントロダクション

ニュートン重力で運動している連星系を考える。両星は質量を持ち、軌道半径、軌道の角速度の物理量がある。この系からは常に重力波が放出されている。つまり、重力波エネルギーの損失がある。損失があるので軌道は縮小していき、最後には合体する。そして、重力波の周波数と振幅は増大する。軌道周期と軌道周期の変化率から質量を推測することができ、観測された振幅から重力波源までの距離を決定することができる。ここでは、連星系が合体するまでの時間 chirp time(t_c) を導出し、まずは 1yr を基準として考え、そして実際の地上観測での測定できる時間を導出し、考察する。

2 楕円軌道の重力波のエネルギー、角運動量

楕円軌道で運動している場合を考える。両星があまり接近していない場合は質点と考えることができる。2つの質点の質量を m_1 、 m_2 、座標は重心を原点にとり $(d_1 \cos \psi, d_1 \sin \psi)$ と $(d_2 \cos \psi, d_2 \sin \psi)$ とする。軌道面を $z = 0$ と取る。 d_1 と d_2 、 m_1 と m_2 の間の距離 d とは $d_1 = m_2 d / m_t$ 、 $d_2 = m_1 d / m_t$ の関係がある。慣性モーメントを表すことができ、ケプラー運動の法則から角速度が得られ、それらから慣性モーメントの3階微分が実行できる。

$$\ddot{I}_{xx} = \beta(1 + e \cos \psi)^2 (2 \sin 2\psi + 3e \sin \psi (\cos \psi)^2)$$

$$\ddot{I}_{yy} = -\beta(1 + e \cos \psi)^2 (2 \sin 2\psi + e \sin \psi (1 + 3(\cos \psi)^2))$$

$$\ddot{I}_{xy} = -\beta(1 + e \cos \psi)^2 (2 \cos 2\psi - e \cos \psi (1 - 3(\cos \psi)^2))$$

$$\beta^2 = \frac{4G^3 m_1^2 m_2^2 m_t}{a^5 (1 - e^2)^5}$$

$$m_t = m_1 + m_2, d = d_1 + d_2 \quad (1)$$

図 1 に楕円軌道を示す。

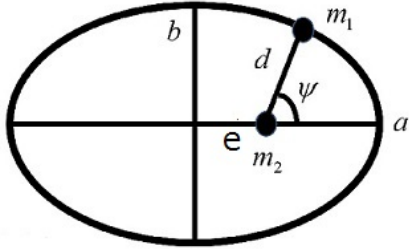


図 1: 楕円軌道

(1) を重力波輻射率に関する四重極公式

$$L_{GW} = \frac{G}{5c^5} \langle \ddot{\bar{I}}_{ij} \ddot{\bar{I}}^{ij} \rangle \quad (2)$$

に代入する。ここで \bar{I}_{ij} は I_{ij} のトレースレス部分である。また、 $\langle \dots \rangle$ はバックグラウンド時空の曲率半径のオーダー $\gg l \gg$ 重力波の波長で表される l という長さのスケールで平均化するという意味である。例えば、

$$\langle \psi(t) \rangle = \frac{1}{P_b} \int \frac{d\psi}{\psi} \psi(t) \quad (3)$$

となる。ここで、 P_b は軌道周期である。すると

$$L_{GW} = \frac{32G^4 m_1^2 m_2^2 m_t}{5c^5 a^5 (1-e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4\right) \quad (4)$$

が得られる。ここで、 e は離心率である。同様にして重力波の運ぶ角運動量を求める。角運動量テンソル J^{ik} を $S_i = \epsilon_{ijk} J^{jk}$ で表す。4重極波の場合は

$$\frac{dS_i^{GW}}{dt} = \frac{2G}{5c^5} \epsilon_{ijk} \langle \ddot{\bar{I}}^{km} \ddot{\bar{I}}_m^j \rangle \quad (5)$$

と計算できる。これから慣性モーメントの微分を代入して、平均化を実行すると

$$\frac{dS_z^{GW}}{dt} = \frac{32G^4 m_1^2 m_2^2 (Gm_t)^{1/2}}{5c^5 a^{7/2} (1-e^2)^2} \left(1 + \frac{7}{8}e^2\right) \quad (6)$$

となる。

3 軌道周期、長半径、離心率の変化

連星系の全ニュートンエネルギー $E (< 0)$ 、角運動量 J_z とする。それぞれは

$$a = -\frac{Gm_1 m_2}{2E} \quad (7)$$

$$J_z^2 = G \frac{m_1^2 m_2^2}{m_t} a (1-e^2) \quad (8)$$

の関係がある。多くの場合、重力波によってエネルギーが変化する時間スケール T_E と角運動量に変化する時間スケール T_J は軌道周期 P_b に比べて十分に長い。このような時は、 E と J_z が変化した時、 a と e が準静的に変化すると考えてよい。よって

$$\frac{dE}{dt} = -L_{GW} = -\frac{32G^4 m_1^2 m_2^2 m_t}{5c^5 a^5 (1-e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4\right) \quad (9)$$

$$\frac{dJ_z}{dt} = -\frac{32G^3 m_1 m_2 m_t}{5c^5 a^{7/2} (1-e^2)^2} \left(1 + \frac{7}{8}e^2\right) \quad (10)$$

を得る。(9) の式から a の時間変化を決める式

$$\frac{da}{dt} = -\frac{64}{5} \frac{G^3 m_1 m_2 m_t}{c^5 a^3 (1-e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4\right) \quad (11)$$

が得られる。(11) の式よりケプラーの法則から軌道周期の変化を決める式

$$\begin{aligned} \frac{dP_b}{dt} = & -\frac{192\pi}{5} \left(\frac{P_b}{2\pi}\right)^{-5/3} (1-e^2)^{-7/2} \left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4\right) \\ & \times \frac{G^2 m_1 m_2}{c^5} (Gm_t)^{-1/3} \end{aligned} \quad (12)$$

が得られる。

また、離心率 e の変化は

$$\frac{2}{J_z} \frac{dJ_z}{dt} = \frac{1}{a} \frac{da}{dt} - \frac{2e}{1-e^2} \frac{de}{dt} \quad (13)$$

なので

$$\frac{de}{dt} = -\frac{304}{15} e \frac{G^3 m_1 m_2 m_t}{c^5 a^4 (1-e^2)^{5/2}} \left(1 + \frac{121}{304}e^2\right) \quad (14)$$

を得る。

これらの式から、 a と e の関係式は

$$\frac{da}{a} = \frac{12}{19} \frac{1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4}{e(1-e^2) \left(1 + \frac{121}{304}e^2\right)} dt \quad (15)$$

となる。

ここで、ブラックホールを例にしてみる。ブラック

ホールには降着円盤が存在する場合がある。一般的なモデルでは、この円盤の内縁半径はシュバルツシルト半径の 3 倍より内側になることはない。つまり、この距離より内側には安定な束縛軌道は存在しない。これを last stable orbit (LSO) と呼ぶ。(15) の関係式を用いて LSO の場合を計算する。質量は $20M_{\odot}$ とし、これから半径は $a = 1.8 \times 10^5 \text{m}$ となる。離心率 e の初期値を $e_0 \sim 1$ とした。計算結果のグラフが図 2 である。

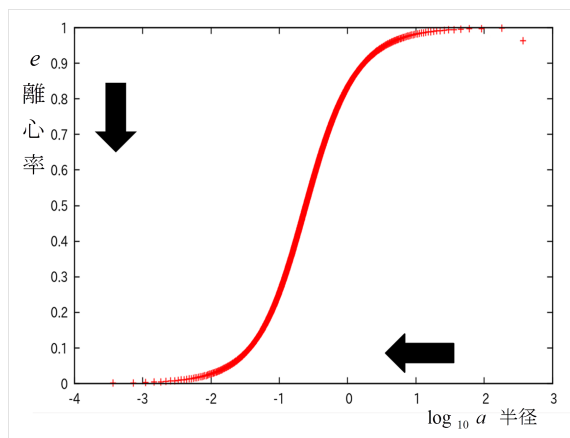


図 2: 長半径と離心率の関係

図 2 の矢印は時間経過を表す。これからわかるように、半径 a が 0 に近づいていくと、離心率 e は $e_0 \sim 1$ であっても 0 に近づく、つまり軌道は円に近づいていくことがわかる。

4 chirp time

次に、連星が合体するまでに要する時間 t_c を計算する。つまり半径 a が 0 になるまでの時間である。ここでは円を考えてみる。 $e_0 = 0$ の時は、(14) より $e(t) = 0$ であり、(11) は積分ができて

$$a(t) = a_0 \left(1 - \frac{t}{t_c(a_0)}\right)^{1/4} \quad (16)$$

$$t_c(a_0) = \frac{5}{256} \frac{c^5}{G^3} \frac{a_0^4}{m_1 m_2 m_t} \quad (17)$$

となる。

ここで LSO の場合に、 t_c がどのくらいの値になる

か計算してみる。両星が同質量だとして、質量を太陽質量の 20 倍程度とする。すると合体するまでの時間は $t_c = 0.251 \times 10^4 \text{s}$ になる。これは 1yr 未満である。

次に chirp time が 1yr であるラインを図 3 に示す。また、このグラフに地上で観測できる周波数の大雑把なラインを重ねる。重力波の周波数を $f \sim (Gm/4\pi r^3)^{1/2}$ としてプロットし、1 ~ 10000Hz の範囲にした。そして、Black hole line も同様に重ねる。図 3 はその結果である。chirp time のラインより上は 1yr 以上である。Black hole line より下には天体はない。図より Earth band と 1yr の重なる範囲はない。よって、地上で 1yr 付近で重力波を観測できないと考えることができる。1yr は Space band で観測可能である。

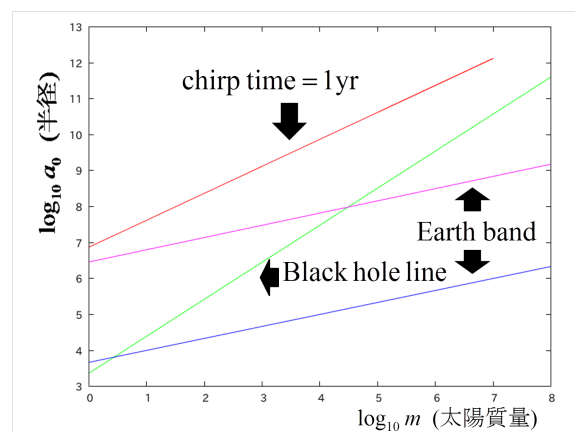


図 3: 1yr と観測可能な範囲の質量と軌道半径の関係

では、地上で観測できる連星系の chirp time はどのくらいなのだろうか。例えば、質量が $2.8M_{\odot}$ の典型的な連星中性子星の場合、軌道半径が約 700 km のときに $f \sim 1.2 \text{Hz}$ で、chirp time は約 15 分になる。

簡単な計算ではあるが、

$$t_c = 1.2 \times 10^{37} a_0^{-6} f^{-6} \quad (18)$$

程度になる。おそらく、観測される対象はこのくらいのオーダーになると考えられる。

5 イベントの発生率

では、このような連星が合体するようなイベントはどのくらいの発生率なのだろうかを考えてみる。連星中性子星を例にとってみる。まず、軌道周期と軌道周期の変化率、 t_c から連星が生れてから合体するまでの時間がわかる。この時間から、我々の銀河中での連星中性子星の合体率がわかる。また、銀河の密度から、宇宙で連星中性子星の合体率がわかる。これらから、おおそもっともらしい評価をすると、200Mpc 内で年間 2 ~ 3 イベントという率を与える。また、同じ範囲で連星の合体が、かなり大きなエラーバーで年間約 40 のイベント率として見積もられているものもある。

6 まとめ

連星系が進化すると、軌道は円に近づくことがわかった。LSO の場合は chirp time は 1yr 未満であると考えられる。また、chirp time の半径と質量の関係を示し、観測されるであろう対象のオーダーを示せた。

7 考察

連星系の chirp time がわかったが、円軌道の場合のみを考えたので、離心率の影響も考慮する必要がある。その場合、chirp time は幅が出てくると考えられる。そして、観測できる chirp time は円軌道で約 15 分ぐらいと考えられる。重力波を観測するとき、横軸は時間のスケールとなる。観測時間がそのくらいなので、データ解析の手法も今後、研究する必要がある。そして、ここでは、質点と考える計算をしたが、両星の距離が近くなると両星の自己重力に比べて潮汐力が強くなるので、質点と考えることができなくなる。また連星系のイベント発生率を決定するには、まだエラーバーが大きいので、より重力波を観測するには確実性のあるものが要だ。

Reference

- E.S.Phinney “THE RATE OF NEUTRON STAR BINARY MEAGERS IN THE UNIVERSE:MINIMAL PREDICTIONS FOR GRAVITY WAVE DETECTORS”.The Astrophysical Journal.380.L17-L21.(1991) October 10
- 物理学教科書シリーズ 一般相対論 著者佐々木 節.(1996) 発行元 産業図書
- 重力波をとらえる 存在の証明から検出へ 著者中村 卓史 and 著者大橋 正健 and 著者三尾 典克 .(1998). 発行元 京都大学学術出版会
- B.S.Sathyaprakash,Bernard F.Schutz “Physics, Astrophysics and Cosmology with Gravitational Waves” Living Rev.Relativity,12,lrr-2009-2,(2009)
- シリーズ現代の天文学 ブラックホールと高エネルギー現象 著者小山 勝二 他編 .(2007). 発行元 日本評論社