

bi-gravity から予言される重力波振動

小幡一平 (京都大学大学院理学研究科)

Abstract

本発表は論文 (1) のレビューである。この論文では ghost-free な bi-gravity 理論に基づき、そこからどのような重力波振動が生じるのかを実際の観測に絡めて議論している。元来この理論からは一般相対論 (以下、GR と略称) が予言する場合にとても似た宇宙論的解を導くことができ、宇宙論的背景を説明する自然なモデルにもなっている。そして massive なグラビトンによる重力波振動は GR が予言するものとは大きく異なることがわかり、その振動が KAGRA や LIGO、Virgo や GEO の検出の対象になると期待される。

1 イントロダクション

これまでグラビトンに質量をもたせることで、重力波の伝播がどう変更を受けるのか、またその変更は検出可能か等といった話題は数多く研究されてきた (論文 (2),(3) 等)。従来、グラビトンに質量をもたせると Boulware-Deser (BD) ゴーストと呼ばれるものが生じ、理論が不安定になると考えられていた (論文 (4)) が、近年そのようなゴーストがなく (ghost-free)、それに加えて時空のダイナミカルな計量を 1 つから 2 つにした bi-gravity model が Hassan や Rosen らによって最初に提唱され (論文 (5))、その困難が解決された。ゴーストの除去は非線形な massive gravity 理論に基づいて行われる (論文 (6),(7),(8))。また、bi-gravity からは従来の massive gravity では説明の難しかった安定な宇宙論的解を得られることも大きなメリットの一つになっている。

まず、計量は 2 つ用意し

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad d\tilde{s}^2 = \tilde{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1)$$

とする。チルダのついている方が 2 つ目の計量になっている。Ghost-free な作用 $S = \int dx^4 \mathcal{L}$ は次に与えられるラグランジアン密度 \mathcal{L} を用いて構成される。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \equiv & \sqrt{g} \left[M_G^2 \left(\frac{R}{2} - m^2 V \right) + L_m \right] \\ & + \frac{\kappa M_G^2}{2} \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{R}. \end{aligned} \quad (2)$$

$M_G = 1/\sqrt{8\pi G}$ はプランク質量、 R は $g_{\mu\nu}$ 、 \tilde{R} は $\tilde{g}_{\mu\nu}$

の計量から求められるリッチスカラーである。 m はグラビトンの質量に由来するパラメータである (質量自体を表してはいない)。 κ は二つの計量の重力定数の比であり、 $\tilde{g}_{\mu\nu}$ の万有引力定数を \tilde{G} とすれば $\kappa \equiv G/\tilde{G}$ と与えられる。 L_m は物質場の項のラグランジアン密度であり $g_{\mu\nu}$ としか結合しない。汎関数 V は

$$V = \sum_{n=0}^4 c_n V_n(Y_\nu^\mu), \quad Y_\nu^\mu = \sqrt{g^{\mu\alpha} \tilde{g}_{\alpha\nu}} \text{ であり、}$$

$$V_0 \equiv 1 \quad (3)$$

$$V_1 \equiv [Y] \quad (4)$$

$$V_2 \equiv [Y]^2 - [Y^2] \quad (5)$$

$$V_3 \equiv [Y]^3 - 3[Y][Y^2] + 2[Y^3] \quad (6)$$

$$V_4 \equiv [Y]^4 - 6[Y]^2[Y^2] + 8[Y][Y^3] + 3[Y^2]^2 - 6[Y^4] \quad (7)$$

と与えられる。 $[Y^n] \equiv \text{tr}(Y^n) = Y_{\alpha_0}^{\alpha_0} Y_{\alpha_1}^{\alpha_1} \dots Y_{\alpha_{n-1}}^{\alpha_{n-1}}$ と表記している。 c_n は無次元の定数である。

作用を計量で変分することでこのモデルの時空の発展方程式が得られる。 $g_{\mu\nu}$ については

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + B_{\mu\nu} = \frac{1}{M_G^2} T_{\mu\nu}, \quad (8)$$

$\tilde{g}_{\mu\nu}$ については

$$\kappa [\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{R}] + \tilde{B}_{\mu\nu} = 0 \quad (9)$$

ともとまる。 $B_{\mu\nu}, \tilde{B}_{\mu\nu}$ は質量項の変分に由来して生じる有効エネルギー運動量テンソルであり、

$$B_\nu^\mu = m^2 V \delta_\nu^\mu - \frac{\partial V}{\partial Y_\mu^\lambda} Y_\nu^\lambda \quad (10)$$

$$\tilde{B}_\nu^\mu = m^2 \left(\frac{\tilde{g}}{g} \right)^{-1/2} \frac{\partial V}{\partial Y_\mu^\lambda} \quad (11)$$

ともとめられる。 $B_{\mu\nu}, \tilde{B}_{\mu\nu}, T_{\mu\nu}$ はそれぞれエネルギー運動量保存の式

$$\nabla_\mu B_\nu^\mu = 0, \quad \tilde{\nabla}_\mu \tilde{B}_\nu^\mu = 0, \quad \nabla_\mu T_\nu^\mu = 0 \quad (12)$$

を満たす。

2 宇宙論的背景

背景時空として、計量は一様等方な宇宙を記述する FLRW 計量

$$ds^2 = a^2(t)(-dt^2 + d\mathbf{x}^2), \quad d\tilde{s}^2 = \tilde{a}^2(t)(-\tilde{c}^2(t)dt^2 + d\mathbf{x}^2) \quad (13)$$

を用いる。ただし $c = 1$ とする。これより (8) 式、(9) 式を解くとそれぞれの計量に対するフリードマン方程式が得られる。 $g_{\mu\nu}$ については

$$3H^2 = \frac{\rho_m + \rho_V}{M_G^2}, \quad H = \frac{\dot{a}}{a^2} \text{(ドットは時間微分)} \quad (14)$$

を得る。 ρ_m は現在の物質のエネルギー密度である。現在の密度の割合は非相対論的物質 (ダスト) ρ_d とダークエネルギー ρ_{DE} (宇宙項) でほとんど占められているので、 $\rho_m = \rho_d + \rho_{DE}$ とした。 ρ_V は質量項のエネルギー密度で

$$\rho_V(\xi) \equiv M_G^2 m^2 (c_0 + 3\xi c_1 + 6\xi^2 c_2 + 6\xi^3 c_3), \quad \xi \equiv \frac{\tilde{a}}{a} \quad (15)$$

と表される。 $\tilde{g}_{\mu\nu}$ についても同様にフリードマン方程式

$$\frac{3}{\tilde{c}^2 a^2} \left(\frac{\dot{\tilde{a}}}{\tilde{a}} \right)^2 = \frac{m^2}{\kappa} \left(\frac{c_1}{\xi} + 6c_2 + 18\xi c_3 + 24\xi^2 c_4 \right) \quad (16)$$

を得る。 $\nabla_\mu B_0^\mu = 0$ (エネルギー保存則) を解くと

$$3\Gamma(\xi) \left[\tilde{c}aH - \frac{\dot{\tilde{a}}}{a} \right] = 0, \quad \Gamma(\xi) \equiv c_1\xi + 4c_2\xi^2 + 6c_3\xi^3 \quad (17)$$

となる。 $\Gamma(\xi)$ はゼロはとらないとして (論文 (9))、 $\tilde{c}aH - \frac{\dot{\tilde{a}}}{a} = 0$ が成り立つものとする。

ρ_m, ρ_V が共にゼロとなるような ξ を ξ_c とおき、更に $m^2 \gg \rho_m/M_G^2$ の条件を課す。この条件は宇宙膨張の効果が重力波の振動のスケールに対して微小であることに対応している。 ξ は ξ_c の近傍として $\xi - \xi_c$ の一次のオーダーまで近似して計算することで、(14) 式は

$$3H^2 \approx \frac{\rho_m}{M_G^2}, \quad \tilde{M}_G^2 = M_G^2(1 + \kappa\xi_c^2) \quad (18)$$

と近似できる。 $\kappa\xi_c^2$ の値が極端なものでない限りは、 $m^2 \gg \rho_m/M_G^2$ は $m^2 \gg H^2$ とかける。 \tilde{c} についても計算すると

$$\tilde{c} \approx 1 + \frac{\kappa\xi_c^2(\rho_m + P_m)}{\Gamma_c m^2 \tilde{M}_G^2} \quad (19)$$

を得る。 $\Gamma_c \equiv \Gamma(\xi_c)$ である。これより $\tilde{c} \approx 1 + \mathcal{O}(H^2/m^2)$ であることから、 $H^2/m^2 \ll 1$ より $\tilde{c} - 1 \ll 1$ である

3 2つの重力波

重力波は次の形の摂動 (TTゲージ) で記述される。

$$h_{ij} = a^2(h_+ \epsilon_{ij}^+ + h_\times \epsilon_{ij}^\times) \quad (20)$$

$$\tilde{h}_{ij} = \tilde{a}^2(\tilde{h}_+ \epsilon_{ij}^+ + \tilde{h}_\times \epsilon_{ij}^\times). \quad (21)$$

ただし $\text{tr}(\epsilon^+ \epsilon^+) = 1 = \text{tr}(\epsilon^\times \epsilon^\times)$, $\text{tr}(\epsilon^+ \epsilon^\times) = 0$ である。 g_{ij} の重力波は光速 ($c = 1$) で伝播し、 \tilde{g}_{ij} のそれは $\tilde{c} \approx 1 + \mathcal{O}(H^2/m^2)$ で伝播する。伝播の式は論文 (9) より、添え字の +、 \times は省略するとして

$$\ddot{h} - \Delta h + m^2 \Gamma_c (h - \tilde{h}) = 0 \quad (22)$$

$$\ddot{\tilde{h}} - \tilde{c}^2 \Delta \tilde{h} + \frac{m^2 \Gamma_c}{\kappa \xi_c^2} (\tilde{h} - h) = 0 \quad (23)$$

となり、この式からもわかるように、2つの重力波は互いに影響を及ぼし合う。フーリエ変換してこの式から分散関係を求めると、 f を重力波 h , \tilde{h} の振動数として、2つのモード

$$k_1^2 = (2\pi f)^2 - \frac{\mu^2}{2} \left(1 + x - \sqrt{1 + 2x \frac{1 - \kappa\xi_c^2}{1 + \kappa\xi_c^2} + x^2} \right) \quad (24)$$

$$k_2^2 = (2\pi f)^2 - \frac{\mu^2}{2} \left(1 + x + \sqrt{1 + 2x \frac{1 - \kappa\xi_c^2}{1 + \kappa\xi_c^2} + x^2} \right) \quad (25)$$

$$x \equiv \frac{2(2\pi f)^2(\tilde{c} - 1)}{\mu^2}, \quad \mu^2 \equiv \frac{(1 + \kappa\xi_c^2)\Gamma_c m^2}{\kappa\xi_c^2} \quad (26)$$

で表され、固有関数は

$$h_1 = \cos\theta_g h + \sin\theta_g \sqrt{\kappa\xi_c} \tilde{h} \quad (27)$$

$$h_2 = -\sin\theta_g h + \cos\theta_g \sqrt{\kappa\xi_c} \tilde{h} \quad (28)$$

$$\theta_g \equiv \frac{1}{2} \cot^{-1} \left(\frac{1 + \kappa\xi_c^2}{2\sqrt{\kappa\xi_c}} x + \frac{1 - \kappa\xi_c^2}{2\sqrt{\kappa\xi_c}} \right) \quad (29)$$

となる。 $x \rightarrow 0 (H/m \rightarrow 0)$ の極限を考えると

$$k_1^2 = (2\pi f)^2 \quad (30)$$

$$k_2^2 = (2\pi f)^2 - \mu^2 \quad (31)$$

となり、 μ は2番目のモードでのグラビトンの質量に対応していることがわかる。一方1番目のモードは massless であることから、このモードは GR の場合を反映している。これより、massive なグラビトンの効果が位相のずれとして現れてくる。距離 D までの波の伝播を考えると、各モードの位相の変化分 $\delta\Phi_{1,2}$ は (24) 式、(25) 式から

$$\delta\Phi_1 = -\frac{\mu D \sqrt{\tilde{c} - 1}}{2\sqrt{2x}} \left(1 + x - \sqrt{1 + 2x \frac{1 - \kappa\xi_c^2}{1 + \kappa\xi_c^2} + x^2} \right) \quad (32)$$

$$\delta\Phi_2 = -\frac{\mu D \sqrt{\tilde{c} - 1}}{2\sqrt{2x}} \left(1 + x + \sqrt{1 + 2x \frac{1 - \kappa\xi_c^2}{1 + \kappa\xi_c^2} + x^2} \right) \quad (33)$$

ともめられる。 x の関数として計算すると、1番目のモードは $\delta\Phi_1$ は小さく抑えられるのに対し、2番目のモードは $\delta\Phi_2$ は大きく増大し得るものだとわかる。グラフで見ると図1のようになる。

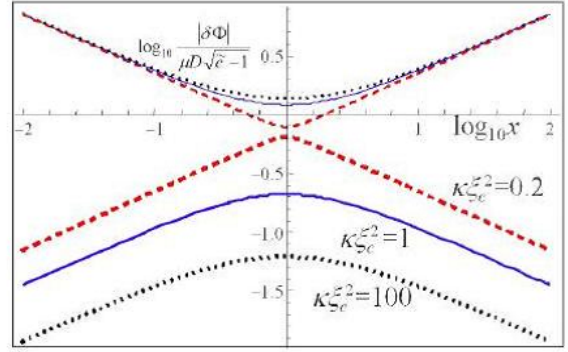


図 1: $\kappa\xi_c^2 = 0.2$ (赤点線)、1 (青線)、100 (黒点線) の値ごとの $\delta\Phi_{1,2}$ のグラフ。下側が $\delta\Phi_1$ 、上側が $\delta\Phi_2$ である。

4 予言される重力波振動

以上をふまえて、ある連星中性子星の衝突までに放出される重力波の振動をこのモデルの下で分析する。運動は重心系から見ており円軌道を描いている。ポストニュートン法を用いて 1.5 次のオーダーまでで近似すると、観測される信号はフーリエ空間で

$$h(f) = A(f) e^{i\Phi(f)} \left[B_1 e^{i\delta\Phi_1(f)} + B_2 e^{i\delta\Phi_2(f)} \right] \quad (34)$$

$$B_1 = \cos\theta_g (\cos\theta_g + \sqrt{\kappa\xi_c} \sin\theta_g) \quad (35)$$

$$B_2 = \sin\theta_g (\sin\theta_g + \sqrt{\kappa\xi_c} \cos\theta_g) \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \Phi(f) \equiv & 2\pi f t_c - \Phi_c - \frac{\pi}{4} + \frac{3}{128} y^{-5/3} \\ & + \frac{5}{96} \left(\frac{743}{336} + \frac{11}{4} \eta \right) \eta^{-2/5} y^{-1} \\ & - \frac{3\pi}{8} \eta^{-3/5} y^{-2/3} \end{aligned} \quad (37)$$

$(y = \pi \mathcal{M} f, \mathcal{M} = (m_1 m_2)^{3/5} / (m_1 + m_2)^{1/5}, \eta = (m_1 m_2) / (m_1 + m_2)^2)$ と与えられている。信号の到着時刻 t は停留位相近似を用いて

$$t = \frac{d(\Phi + \delta\Phi_i)}{d(2\pi f)} \quad (38)$$

となり、これをグラフで示したのが図 2 である。これより、GR(一番目)のモードは連星が合体に近づくにつれ回転が速くなる効果から重力波の周波数も増加していくという直観にもかなった様子を読み取れることに対し、グラビトンが massive な方(二番目)のモードは合体後も振動が観測され、周波数の変化は時刻 t_c 以後は 2 パターン存在し、一方は高いところから低いところへ減少していくという奇妙な信号が生じる。

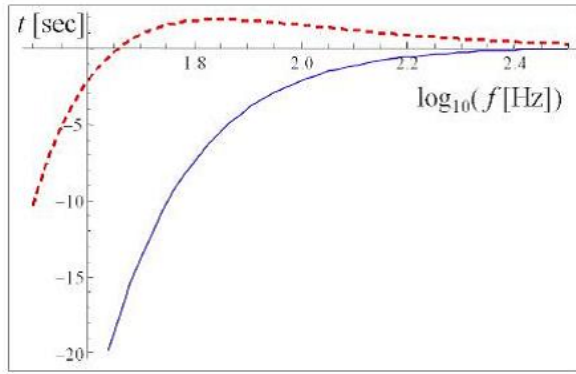


図 2: $1.4M_{\odot} + 1.4M_{\odot}$ の連星における信号の到着時刻と周波数の関係。横軸は $t = t_c$ である。 $\kappa\xi_c^2 = 100$, $D = 300$ Mpc, $H = 67.3$ kms $^{-1}$ Mpc $^{-1}$, $\Omega_0 = 0.315$, $\mu = (0.001$ pc) $^{-1}$ の値を用いた。青線が 1 番目のモード、赤点線が 2 番目のモードである。

5 結論

以上の結果から、この様なおかしい信号が次世代の重力波検出器に検知されたならば、GR は修正される可能性を有していることをこのモデルから主張できる。ただ $\kappa\xi_c^2$ がある程度大きくなければならないことや、その他理想的に課した要請もあるものの、これらは観測的にそこまで厳しいことを要求している訳ではない。一つの可能性としてこの様な条件下で生じる現象を预言しているに過ぎないが、それでも将来観測される信号として期待をしてもいいように思える。

Reference

- [1] Antonio De Felice, Takashi Nakamura, and Takahiro Tanaka. April 14, 2013. arXiv:1304.3920v1.
- [2] C.M.Will. 1998. Phys.Rev.D **57**,2061.
- [3] K.Yagi and T.Tanaka. 2010. Phys.Rev.D **81**,064008.
- [4] D.G.Boulware and S.Deser. 1072. Phys.Rev.D **6**, 3368.
- [5] S.F.Hassan and R.A.Rosen.2012. JHEP **1202**,126.
- [6] C.de Rham and G.Gabadadze. 2010. Phys.Rev.D**82**,044020.
- [7] C.de Rham, G.Gabadadze and A.J.Tolley. 2011. Phys.Rev.Lett.**106**,231101.
- [8] S.F.Hassan and R.A.Rosen. 2012. Phys.Rev.Lett **108**,041101.
- [9] D.Comelli, M.Crisostomi and L.Pilo. 2012. JHEP **1206**,085.