距離の逆 n 乗項をもつ一般化した弱場の静的球対称計量から求める重力レンズの曲がり角

中島　昂己 (弘前大学大学院 理工学研究科)

Abstract

我々は重力レンズによる光の曲がり角において、代表的な時空である Schwarzschild ブラックホール（SBH）と Ellis ワームホール (EWH) における光とレンズ天体との距離 r の次数（距離依存性）が異なることから、球対称かつ弱重力場な時空において r の逆 n 乗項 (n は正の実数) によって時空構造が表されるより一般化された光の曲がり角を導出した。この距離依存性についてより一般化された光の曲がり角によって、SBH や EWH などの既に知られている球対称時空の曲がり角を再現すると同時に、球対称時空での曲がり角についてより一般的な議論も可能になった。

1 Introduction

一般相対論の予言する現象の一つに重力レンズがある。重力レンズとは光源となる天体から出た光が経路付近にある天体（レンズ天体）の重力によってその軌道が曲げられて観測者へ届く現象で、1919 年の皆既日食時に Eddington によって太陽による重力レンズが観測されている。現在ではレンズ天体がブラックホールや、銀河団などと考えられる重力レンズが観測されている。

重力レンズはレンズ天体の時空構造によって起こるため、現在直接観測が難しい「見えない」時空構造を調べることが可能であり、これを利用した銀河団の質量推定や太陽系外惑星の探査が盛んに行われている。重力レンズによってどれだけ光が曲がったかを表すには光の曲がり角が用いられ、重力レンズの議論で重要な量である。

重力レンズを起こす代表的な時空として、Swarzschild ブラックホール (SBH) がある。これによる光の曲がり角 α は

$$\alpha = \frac{2r_g}{b} + O\left(r_g^2\right)$$

で与えられる (r_g:Schwarzschild 半径、b:インパクトパラメータ)。

一方で、観測される像の明るさが時間変化する重力マイクロレンズ観測でエキゾチック物質、特に「負質量」で構成されているという Ellis ワームホール (EWH) を探査する方法が提案された [F. abe (2010)], [Y. Toki, T. Kitamura, H. Asada, and F. Abe (2011)]。ワームホールは 2 つの離れた時空を結ぶ時空構造のことで、エキゾチック物質とは通常の物質（原子や電子）とは異なる性質を持った物質をいい、理論からその存在が提案されている。ただし、その存在が実験や観測で確かめられているものはほとんどない。

このエキゾチック物質の存在を観測から検証することは宇宙の構成要素や形成過程を解明する上でとても重要なことである。よって、これらのエキゾチック物質が起こす現象をあらかじめ理論予測することが必要となる。

これを受けて我々は過去の研究 [T. K. Dey, S. Sen (2008)], [K. Nakajima, H. Asada (2012)] から SBH と EWH の光の曲がり角において、その距離依存性が異なることに着目して研究を発展させ、計量中の時空の歪みを表す項における距離依存性についてより一般化した弱場の球対称時空を仮定し、その時空での光の曲がり角を弱場近似を使って導出した。

2 Methods

弱場近似における静的球対称な時空の計量を、ε_1 と ε_2 を共に微小量として

$$ds^2 = -\left(1-\frac{\varepsilon_1}{r^n}\right)dt^2 + \left(1+\frac{\varepsilon_2}{r^n}\right)dr^2 + r^2 d\Omega^2 + O(\varepsilon_1^2,\ \varepsilon_2^2,\ \varepsilon_1\varepsilon_2) \tag{1}$$

とする。ただし、n は正の実数で $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ である。ある種の天体を想定するため、漸近的平坦であることを仮定した。この時空構造によって起こされる光の曲がり角 α を求めたい。

2.1 計量の変形

曲がり角を導出しやすくするために（1）式を共形変換する。光の測地線は常に null なので（1）式を共形変換したものを ds'^2 とすると

$$ds'^2 = \left(1-\frac{\varepsilon_1}{r^n}\right)ds^2 = 0 \tag{2}$$

つまり

$$ds'^2 = -dt^2 + \frac{\left(1+\frac{\varepsilon_2}{r^n}\right)}{\left(1-\frac{\varepsilon_1}{r^n}\right)}dr^2 + \frac{r^2}{\left(1-\frac{\varepsilon_1}{r^n}\right)}d\Omega^2 + O(\varepsilon_1^2,\ \varepsilon_2^2,\ \varepsilon_1\varepsilon_2) \tag{3}$$

としてよい。
ここで $\dfrac{r^2}{\left(1-\frac{\varepsilon_1}{r^n}\right)} = R^2$ とおく。

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ が微少量なので、$\dfrac{\varepsilon_1}{r^n} \approx \dfrac{\varepsilon_1}{R^n}$、$\dfrac{\varepsilon_2}{r^n} \approx \dfrac{\varepsilon_2}{R^n}$ として $n\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$ とおくと

$$ds'^2 = -dt^2 + \left(1+\frac{\varepsilon}{R^n}\right)dR^2 + R^2 d\Omega^2 + O(\varepsilon^2) \tag{4}$$

となる。

2.2 曲がり角の導出

(4) 式から光の曲がり角 α を求める。λ をアフィンパラメータとすると光のラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu, \quad \left(\ \dot{}\ = \frac{d}{d\lambda}\right) \tag{5}$$

これより光のエネルギー E と角運動量 L は

$$\begin{aligned} E &= -p_0 = g_{00}\dot{x}^0 = \dot{t} \\ L &= p_3 = g_{33}\dot{x}^3 = R^2 \sin^2\theta\dot{\phi} \end{aligned} \tag{6}$$

時空が球対称であるので、一般性を失わずに光子の軌道が赤道面上 $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$ にあるとしてよい。これより光の軌道は

$$\frac{1}{R^4}\left(\frac{dR}{d\phi}\right)^2 = \left(1+\frac{\varepsilon}{R^n}\right)^{-1}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{R^2}\right) \approx \left(1-\frac{\varepsilon}{R^n}\right)\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{R^2}\right) \tag{7}$$

ただし、$\dfrac{L}{E} = b$(インパクトパラメータ) とした。これは重力レンズが起こらない時 $(\varepsilon = 0)$ の光の最近接距離 R_0 の考察から導かれる。

(7) 式において $\dfrac{1}{R} = U$ とし、$\dfrac{1}{b} = u_b$ とすると

$$d\phi^2 = \frac{dU^2}{(u_b^2 - U^2)(1-\varepsilon U^n)} \tag{8}$$

よって、

$$\Phi \approx \int_0^{u_b} \frac{dU}{\sqrt{(u_b^2 - U^2)}} + \frac{\varepsilon}{2}\int_0^{u_b} \frac{U^n dU}{\sqrt{(u_b^2 - U^2)}} \tag{9}$$

ここで $U = u_b \cos\theta$ とおくと、(9) 式は

$$\Phi = \frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{2b^n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta d\theta \tag{10}$$

よって光の曲がり角 α は

$$\begin{aligned} \alpha &= 2\Phi - \pi \\ &= \frac{\varepsilon}{b^n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta d\theta \end{aligned} \tag{11}$$

(11) 式内の被積分関数は、特に n が整数の時は以下のようになる。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta d\theta = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2} & (\text{n:偶数}) \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & (\text{n:奇数}) \end{cases} \tag{12}$$

3 Discussion

距離依存性を考慮してより一般化された光の曲がり角が求められた所で、(11) 式がよく知られた時空による曲がり角を再現できるか確認する。

まず SBH について確かめる。Schwarzschild 計量は、Schwarzschild 半径を $r_g = 2GM$（G は万有引力定数、M は中心天体の質量）として

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{r_g}{r}\right) dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) + O\left(r_g^2\right) \tag{13}$$

である。$\frac{r_g}{r} \ll 1$ を微小量として、その一次の精度まででで曲がり角を求めると、

$$\alpha_{sch} = \frac{2r_g}{b} \tag{14}$$

である。(13) 式と (1) 式との比較から、SBH では $n = 1$、$\epsilon 1 = \epsilon 2 = r_g$ である。これを (11) 式に代入して

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1 \cdot r_g + r_g}{b^1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^1\theta d\theta \\ &= \frac{2r_g}{b}\end{aligned} \tag{15}$$

となり、一致する。

次に EWH による光の曲がり角について確かめる。EWH 計量は、ワームホールの throat 半径を a として、

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + (r^2 + a^2)d\Omega^2 \tag{16}$$

である。$r^2 + a^2 = R^2$ として共形変換をすると、

$$ds^2 = -dt^2 + \left(1 + \frac{a^2}{R^2}\right) dR^2 + R^2 d\Omega^2 + O(a^4)$$

Ellis ワームホールによる光の曲がり角は $\frac{a}{r} \ll 1$ として一次の精度までで

$$\alpha_{ewh} = \frac{\pi a^2}{4b^2} \tag{17}$$

である [T. K. Dey, S. Sen (2008)], [K. Nakajima, H. Asada (2012)]。(4) 式との比較から、EWH では $n = 2$、$\varepsilon = a^2$ である。これを (11) 式に代入すると

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{a^2}{b^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta \\ &= \frac{\pi a^2}{4b^2}\end{aligned} \tag{18}$$

となり、これも一致する。

4 Conclusion

我々は距離依存性についてより一般化された弱場の静的球対称時空を仮定し、その時空構造による光の曲がり角を導出した。この時空は距離依存性について逆 n 乗項で表されており、既存の球対称時空による曲がり角を再現できるだけでなく、エキゾチック物質による時空構造についても再現することが可能になっている。

Reference

F. Abe, Astrophys. J. **725**, 787 (2010)

Y. Toki, T. Kitamura, H. Asada, and F. Abe, Astrophys. J. **740**, 121 (2011).

T. K. Dey, and S. Sen, Mod. Phys. Lett. A, **23**, 953 (2008).

K. Nakajima, H. Asada, Phys. Rev. D 85, 107501(2012).

G. Clément, Int. J. Theor. Phys. 23, 335 (1984).

G. W. Gibbons & M. Vyska, CQG Vol. 29, 65016, 2012

N. Tsukamoto, T. Harada, Phys. Rev. D 87, 024024 (2013), related work