Wave optics and image formation in gravitational lensing

長谷川 創一 (大阪市立大学大学大学院 理学研究科)

Abstract

幾何光学的には、重力レンズ系では重力の効果の薄レンズ近似を用いることによってレンズ方程式から光源の像を形成する。しかし、重力源となる物体による散乱波に対して Fresnel-Kilchihoff の回折定理を用いることによってレンズ方程式を使うことなく光の波動関数から直接的に光源の像を得ることができる。重力レンズ系での波動光学に基づく像の形成について議論する。

1 Introduction

重力レンズはアインシュタインの一般相対論による予言の一つであり、観測による多くのサンプルが得られている。弱い重力による重力レンズでは、その効果が薄いレンズと同じとする近似により光線の経路がレンズ方程式に従うものとして扱われる。しかし、光の波長が重力源となる物体のサイズよりも十分に小さくない場合には経路だけでなく波自体への効果も重要になる。例えば、重力レンズの重力源となる物体によって散乱される重力波は波の強度が増幅する。このような重力レンズ系における波動光学的な効果についてはあまり議論されていない。E. Herlt と H. Stepani は天体による重力レンズ系での像の位置について、回折された波の Poynting flux を数値計算することによって議論した。彼らは、点光源による像の位置に関して、波動光学と幾何光学とにはその結果に食い違いがあることについて言及したが像の形成についての完全な理解は与えなかった。このため、波動光学に基づいた回折理論による像の形成を調べ、重力レンズ系での像の形成について理解することを目的とする。

2 Wave optics in gravitational lensing

波動光学に基づいた重力レンズの扱い方をみる。

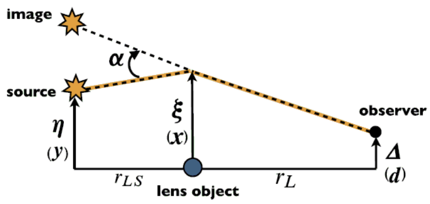

Figure 1. The gravitational lens geometry of the source, the lens and the observer. $\alpha \ll 1$ is the deflection angle. r_L is the distance from the observer to the lens object and r_S is the distance from the observer to the source. $r_{LS} = r_S - r_L$.

重量レンズのバックグラウンドとなる空間の計量を

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\
&= -(1+2U(\boldsymbol{r}))dt^2 + (1-2U(\boldsymbol{r}))d\boldsymbol{r}^2
\end{aligned} \tag{1}
$$

とおく（$|U| \ll 1$）。曲がった重力場での波動方程式は、

$$\partial_\mu(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi) = 0 \tag{2}$$

であり、これは振動数 ω の単色波を仮定すると、

$$(\nabla^2 + \omega^2)\Phi = 4\omega^2 U(\boldsymbol{r})\Phi \tag{3}$$

となる（∇^2 は平らな空間での Laplacian)。

Figure 1. のように配置する。光源は点光源である。考える系では波の散乱は重力源の周辺の小さな領域だけで起こるとする。eikonal 近似及び、重力レンズの薄レンズ近似を仮定して、Rresnel-Kirchhoff の回折理論を考えると、観測地点での波の振幅は、

$$\Phi(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\Delta}) = \frac{\omega a_0}{2\pi i r_{LS} r_L} \int d^2\xi \exp[i\omega S(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\Delta})] \tag{4}$$

$$
\begin{aligned}
S(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\Delta}) &= [(\boldsymbol{\xi}-[\boldsymbol{\eta}])^2 + r_{LS}^2]^{1/2} \\
&\quad +[(\boldsymbol{\xi}-[\boldsymbol{\Delta}])^2 + r_L^2]^{1/2} - \hat{\psi}(\boldsymbol{\xi}) \\
&\approx \frac{(\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\Delta})^2}{2r_S} + r_S \\
&\quad + \frac{r_L r_S}{2r_{LS}}\left(\frac{\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\Delta}}{r_L} - \frac{\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\Delta}}{r_S}\right)^2 \\
&\quad - \hat{\psi}(\boldsymbol{\xi})
\end{aligned}
\tag{5}
$$

となる ($S(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\Delta})$ は光の経路の実行長さ、$|\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\Delta}| \ll r_S$ 及び、$|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\Delta}| \ll r_L$ を仮定)。重力ポテンシャルは

$$
\hat{\psi}(\boldsymbol{\xi}) = 2\int_{-\infty}^{\infty} dx U(\boldsymbol{\xi}, z) \tag{6}
$$

で導入される。重力ポテンシャル U が無いときの観測地点での振幅 Φ_0 を導入して、

$$
\Phi(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\Delta}) = \Phi_0(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\Delta})F(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\Delta}) \tag{7}
$$

と表わすと、

$$
\begin{aligned}
\Phi_0(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\Delta}) &= \frac{a_0}{r_S}\exp[i\omega S_0(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\Delta})], \\
S_0(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\Delta}) &= \frac{(\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\Delta})^2}{2r_S} + r_S
\end{aligned}
\tag{8}
$$

($S_0(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\Delta})$ は $\boldsymbol{\eta}$ から $\boldsymbol{\Delta}$ への直線の経路の長さ) であり、振幅の倍率因子 F は、

$$
F(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\Delta}) = \frac{r_S}{r_L r_{LS}}\frac{\omega}{2\pi i}\int d^2\xi \exp[i\omega S_1(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\Delta})] \tag{9}
$$

$$
S_1(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\Delta}) = \frac{r_L r_S}{2r_{LS}}\left(\frac{\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\Delta}}{r_L} - \frac{\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\Delta}}{r_S}\right)^2 - \hat{\psi}(\boldsymbol{\xi}) \tag{10}
$$

とな。$S_1(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\Delta})$ は Fermat potential である。第一項は光源から観測地点までの"直線での経路"と"偏光による経路"との違いによる幾何学的な時間の遅延、第二項は重力ポテンシャルによる時間の遅延をあらわしている。

無次元量

$$
\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{\xi}}{\xi_0}, \quad \boldsymbol{y} = \frac{r_L}{r_S}\frac{\boldsymbol{\eta}}{\xi_0}, \quad \boldsymbol{d} = \left(1-\frac{r_L}{r_S}\right)\frac{\boldsymbol{\Delta}}{\xi_0}
$$

$$
w = \frac{r_S\xi_0^2}{r_{LS}r_L}\omega \quad \psi = \frac{r_L r_{LS}}{r_S\xi_0^2}\hat{\psi} \tag{11}
$$

を導入する。ここで、

$$
\xi_0 = r_L\theta_E, \quad \theta_E = \sqrt{\frac{4Mr_{LS}}{r_L r_S}} \tag{12}
$$

M は重力源の質量、ξ_0 は Einstein 半径、θ_E は Einstein 角である。これらの無次元量を使うと、

$$
\begin{aligned}
F(\boldsymbol{y},\boldsymbol{d}) &= \frac{\omega}{2\pi i}\int d^2x \\
&\quad \exp\left[iw\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}-\boldsymbol{d}\right)^2 - \psi(\boldsymbol{x}))\right]
\end{aligned}
\tag{13}
$$

$$
\begin{aligned}
\Phi_0(\boldsymbol{y},\boldsymbol{d}) &= \frac{a_0}{r_S} \\
&\quad \exp\left[iw\left(\frac{r_{LS}}{2r_L}\left(\boldsymbol{y}-\frac{r_L}{r_{LS}}\boldsymbol{d}\right)^2 + \frac{r_{LS}r_L}{\xi_0^2}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{14}
$$

となる。幾何光学極限 $w \gg 1$ を用いると、式 (13) は定点周辺で位相関数の積分を数値的に実行することができる。この定点は重力レンズに対するレンズ方程式と呼ばれる式、

$$
\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}-\boldsymbol{d}-\nabla_{\boldsymbol{x}}\psi(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{15}
$$

によって決めることができる。

重力レンズの重力源が質点の場合を考えると、この場合の重量ポテンシャルは、

$$
\psi(\boldsymbol{x}) = \ln|\boldsymbol{x}| \tag{16}
$$

である。そして回折角は

$$
\alpha = |\nabla_{\boldsymbol{\xi}}\hat{\psi}| = \frac{4M}{\xi} \tag{17}
$$

であたえられる。$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{d} = 0$ で、レンズ方程式 (15) 式の解は、

$$
|\boldsymbol{x}| = 1 \tag{18}
$$

となる。これが角度半径 θ_E のアインシュタインリングを表す。

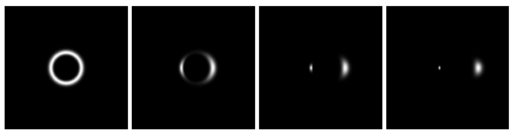

Figure 2. Images of gravitational lensing by a point mass. The source is assumed to have the intensity with Gaussian distribution. From the left to the right panels, the source positions are $y = 0.0, 0.5, 1.0, 1.5$.

Figure 2. のイメージを描くために光源の強度のガウス分布を仮定した。波の性質は式 (13) の回折積分の数値を求めることによって得られる。質点による重力レンズのポテンシャルでは積分は、

$$
F(\boldsymbol{y}) = e^{(i/2)w(|\boldsymbol{y}|^2+\ln(w/2))}e^{\pi/4}\Gamma\left(1-\frac{i}{2}w\right){}_1F_1\left(1-\frac{i}{2}w, 1, -\frac{i}{2}w|\boldsymbol{y}\right. \tag{19}
$$

となる。Figure 3. は観測面上で現れる干渉模様である。

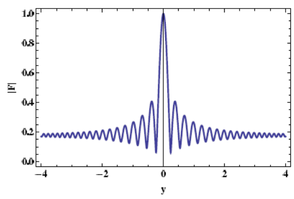

Figure 3. Amplification factor for $w = 10$.

3 Image formation in gravitational lens system

重力レンズ系における波の干渉模様と光源の像の形成を明確にするために、凸レンズを導入して波動光学に基づくとどのような像が現れるかを調べる。Figure 6. に示される重力レンズ系を考え、波動光学を用いて、光源物体の像がどのように表れるかを調べる。

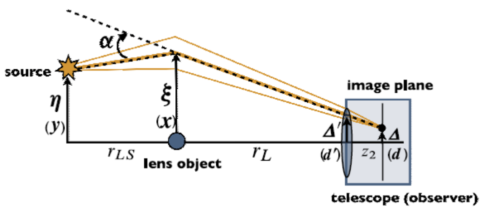

Figure 6. Configuration of a gravitational lens with a convex lens system. Thin orange lines represent paths that contribute to diffraction integrals.

光源として点光源を仮定する。凸レンズの直前での波の振幅は

$$\Phi_L(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{d}') = \Phi_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{d}')F(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{d}') \tag{20}$$

である。凸レンズを通過した後で、像の形成面 z_2 上での波の振幅は

$$\Phi_I(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\Delta}) = \int_{|\boldsymbol{\Delta}'|\le \Delta_0} d^2\Delta' \Phi_L(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\Delta}') \exp\left[-\frac{i\omega}{2f}\boldsymbol{\Delta}'^2\right] \exp\left[\frac{i\omega}{2z_2}(\boldsymbol{\Delta} - \boldsymbol{\Delta}')^2\right] \tag{21}$$

で与えられる。ここで、Δ_0 は凸レンズの口径を表している。無次元変数を使うと、像の形成面での波の振幅は

$$\begin{aligned}\Phi_I(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{d}) = \frac{a_0}{r_S} &\int_{|\boldsymbol{d}'|\le d_0} d^2d' F(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{d}') \\ \times \exp[iw\{ &\frac{r_L r_S}{2r_{LS}}\left(\frac{1}{r_S} + \frac{1}{z_2} - \frac{1}{f}\right)\boldsymbol{d}'^2 \\ &- \left(\boldsymbol{y} + \frac{r_L r_S}{r_{LS} z_2}\boldsymbol{d}\right)\cdot \boldsymbol{d}' \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{r_{LS}}{r_L}\boldsymbol{y}^2 + \frac{r_L r_S}{r_{LS} z_2}\boldsymbol{d}^2\right)\}]\end{aligned} \tag{22}$$

となる。像の形成面 z_2 の位置を凸レンズでのレンズ方程式、

$$\frac{1}{r_S} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{f}$$

を満たすように選ぶと、像の面での波の振幅は、

$$\Phi_I(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{d}) = \frac{a_0}{r_S}\int_{|\boldsymbol{d}'|\le d_0} d^2d' F(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{d}') \exp\left[-iw\left(\boldsymbol{x}_* + \frac{r_L r_S}{r_{LS} f}\boldsymbol{d}\right)\cdot \boldsymbol{d}'\right] \times e^{i(w/2)g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{d})} \tag{23}$$

となる。ここで、$g = (r_{LS}/r_L)\boldsymbol{y}^2 + (r_l r_s / r_{LS} z_2)\boldsymbol{d}^2$ である。したがって、像の形成面での波の振幅は干渉模様を与える倍率因子 F の Fourier 変換である。幾何光学極限 $w \gg 1$ の下で、倍率因子の $\boldsymbol{x}$ 積分、式 (13) は WKB 形式、

$$F(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{d}') \approx A e^{iw\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_* - \boldsymbol{y} - \boldsymbol{d}')^2 - \psi(\boldsymbol{x}_*)\right]}$$

で近似される。ここで、$\boldsymbol{x}_*(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{d}')$ はレンズ方程式、

$$\begin{aligned}0 &= \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} - \boldsymbol{d}' - \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}}\psi(\boldsymbol{x}) \\ &\approx \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} - \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}}\psi(\boldsymbol{x})\end{aligned} \tag{24}$$

の解である。凸レンズの口径は重力レンズ系の大きさよりも十分に小さく、$|\boldsymbol{d}'| \le d_0 \ll 1$ を保持すると仮定した。したがって、像の形成面での波の振幅は

$$\begin{aligned}\Phi_I(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{d}) &= A e^{iw\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_* - \boldsymbol{y})^2 - \psi(\boldsymbol{x}_*)\right]} e^{iwg(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{d})/2} \\ &\quad \times 2\pi d_0^2 \frac{J_1(w|\boldsymbol{x}_*^{(j)} + \beta\boldsymbol{d}|d_0)}{w|\boldsymbol{x}_*^{(j)} + \beta\boldsymbol{d}|d_0}, \\ &\quad \beta \equiv \frac{r_L r_S}{r_{LS} f}\end{aligned} \tag{25}$$

である。大きなレンズ口径の極限または高振動数極限 $wd_0 \to \infty$ の極限では、

$$\Phi_I(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{d}) \propto \delta^2\left[\boldsymbol{x}_*(\boldsymbol{y}) + \frac{r_L r_S}{r_{LS} f}\boldsymbol{d}\right] \tag{26}$$

を得て、点光源の像はレンズ方程式で決まる像の形成面の下の位置に現れる。

$$\boldsymbol{d} = -\frac{r_{LS} f}{r_L r_S} \times \boldsymbol{x}_*(\boldsymbol{y}) \tag{27}$$

近似によるこの結果は幾何光学（光線追跡）による像の形成の同じ結果を導く。レンズ方程式が複数の解 $\boldsymbol{x}_*^{(j)}$,$j = 1, 2, ...,$ を持つとすると、像の面での波の振幅は

$$\Phi_I(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{d}) \propto \sum_j A_j \frac{2J_1(w|\boldsymbol{x}_*^{(j)} + \beta \boldsymbol{d}|d_0)}{w|\boldsymbol{x}_*^{(j)} + \beta \boldsymbol{d}|d_0} \tag{28}$$

となる。ここで、A_j は定数である。

質点の重力レンズによる点光源は波動光学的には像 Figure 7 を与えた。これらは倍率因子 F の Fourier 変換によって得られ、重力レンズのレンズ方程式は使われななかった。この手続きは凸レンズの像の形成に対応する。これらの像は幾何光学により得られる像 Figure 2 に対応する。

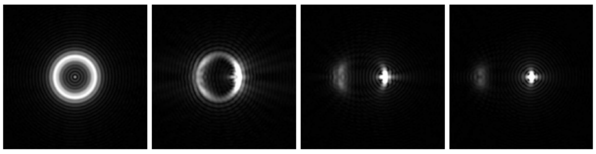

Figure 7. Wave optical images of a point source by the gravitational lensing of a point mass. Parameters are $w = 40, d_0 = 0.5$(aperture of a convex lens), $y = 0, 0.5, 1, 1.5$.

それぞれの図において、有限サイズのレンズの口径によって引き起こされる同心円の干渉模様を観測することができた。これは重力レンズ系に固有の特徴ではない。光線の非同心円の模様も得ることができた。これらは 2 つの像の間の干渉によって引き起こされ、重力レンズ系に固有の特徴である。幾何光学極限における Einstein リングに対応する $y = 0$ の場合では、リングの中央に明るい点が観測できる。これは構造的な干渉の結果であり、幾何光学では現れない。wd_0 が十分に大きい値では、観測地点での波の振幅は幾何光学によって得られる結果と一致する。

4 Summary

波動光学に基づいた重力レンズ系での像の形成について調べた。この目的のために 1 つの薄い凸レンズで望遠鏡を導入した。それは観測地点で形成される干渉模様の Fourier 変換として働く。光線追跡法の使用によって、重力レンズのレンズ方程式を使うことなく観測地点での波動関数から直接像を得ることができた。。この分析によって波の振幅と重力レンズの像とを直接関連付けることができた。

Reference

Yasusada Nambu, Wave optics and image formation in gravitational lensing arXiv: 1207.6846v1 [gr-qc] 30 Jul 2012

Sharma K K, Optics: principles and applications (Academic Press, 2006)