ハローの力学的性質を考慮した非線形摂動論の拡張

櫻井 祐也 (東京大学大学院 理学系研究科)

Abstract

宇宙の大規模構造から宇宙に関する情報を取り出すためには、大規模構造を特徴付ける統計量の精密な理論テンプレートが必要である。さらに、大規模構造は直接観測できず、銀河などのトレーサーを用いて間接的に観測しなければばならない。そのため、理論と観測を比較する際には、密度ゆらぎの重力進化、赤方偏移変形、銀河バイアスの 3 つの効果を取り入れたモデルが必要である。この 3 つを整合的に計算することのできる統合摂動論を用いれば、観測量を直接得ることができる。しかし、銀河の力学的な性質を無視できなくなるような非線形性が強い小スケール領域では、統合摂動論は破綻する。一方、ハローモデルは小スケールで密度ゆらぎの統計分布を与える現象論モデルで、摂動論の破綻するような小スケールでも適用出来る。ただし、観測量を直接得ることはできない。そこで、本研究では、この統合摂動論とハローモデルを組み合わせることで、小スケールまで観測量を直接・精密に予言することのできるモデルを構築する。

1 イントロダクション

宇宙の大規模構造は宇宙に関する多くの情報を含んでいる。例えば、

- 初期の密度ゆらぎの統計的性質
- 宇宙のエネルギー成分の組成
- ダークエネルギーの性質
- ニュートリノの質量

に関する情報である。

これらの情報を取り出すためには、大規模構造の統計的性質を理論によって精密に予言することが重要である。最も単純な線形理論は、比較的大きなスケール ($\sim$100Mpc) に対して良い近似であるが、1%以下の精度を要求される将来の観測に適用するには不十分である。より精密な予言をするためには、重力進化の非線形性を考慮する必要がある。数値シミュレーションはゆらぎの重力進化に現れる非線形性を直接調べることができる方法である。しかし、

- 有限な体積や有限な分解能による影響が現れる
- 物理的解釈が困難である
- 宇宙論的な情報を引き出すために膨大なパラメータ空間を調べる必要があるが、それには時間が掛かり過ぎる、

というような欠点がある。一方、摂動論に基づいた解析計算は、

- ある程度非線形性を取り入れることができる
- 物理的な解釈が比較的容易である
- 高速計算が可能であり、大規模構造から宇宙論的な情報を引き出すのに適している

という利点を持ち、数値シミュレーションの欠点を補うことができる。そのため、非線形摂動論を発展させることは、今後の精密宇宙論において重要である。

宇宙の大規模構造は、銀河を観測することで間接的に観測される。そのため、理論と観測を比較する際に考慮しなければならないことが 2 つある。それは赤方偏移変形と銀河バイアスである。

赤方偏移変形とは、天体までの距離としての赤方偏移が、天体の固有速度によって変形されてしまう効果のことである。小スケールでは、ランダムな天体の速度分散による FoG 効果が効き、大スケールでは、コヒーレントな天体の動きによる Kaiser 効果が効く。銀河バイアスとは、質量分布と銀河分布の間の関係のことである。

ゆらぎの重力進化とこれらの効果を整合的に扱うことができる統合摂動論が知られている (T. Matsubara (2011))。この理論では、直接銀河のクラスタリングを予言できる。しかしながら、摂動論を基礎にしているため、銀河が形成されると考えられる非線形性が強い領域 (ハロー) では使えない。ハローモデルはこのハローの統計的性質を良く説明する現象論的モ

デルであるが、観測量を直接得ることができない。

本研究の目的は、統合摂動論とハローモデルを組み合わせた理論を構築することである。この集録では、T. Matsubara (2011) の理論の紹介と、C. Hikage and K.Yamamoto (2013) のモデルとの融合による新たなモデル構築の展望の議論をする。

2 非線形摂動論

共動座標を $(\boldsymbol{x}, t)$ とし、$\mathrm{d}t = a(\tau)\mathrm{d}\tau$ とする。質量密度ゆらぎを $\delta(\boldsymbol{x},\tau) \equiv \rho(\boldsymbol{x},\tau)/\bar{\rho}(\tau) - 1$ とし、共動座標系での速度 (peculiar velocity) を $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\tau) \equiv \mathrm{d}\boldsymbol{x}/\mathrm{d}\tau$ とする。$\rho(\boldsymbol{x},\tau)$ は質量密度、$\bar{\rho}(\tau)$ は平均質量密度である。$\mathcal{H} = a(\tau)H(H$ はハッブルパラメータ)、$\theta(\boldsymbol{x},\tau) = \nabla\cdot\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\tau)$、$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},\tau) = \nabla\times\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\tau)$ とする。応力 σ_{ij} を無視した場合、渦度 $\boldsymbol{w}$ は、初期に 0 であればその後も 0 と考えられるので、ここでは無視する。一般の関数 $A(\boldsymbol{x},\tau)$ のフーリエ変換を

$$\tilde{A}(\boldsymbol{k},\tau) = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}A(\boldsymbol{x},\tau) \tag{1}$$

と書く。このとき、連続方程式と Euler 方程式はそれぞれ、フーリエ空間で (フーリエ変換の前後で同じ記号を用いる)、

$$\begin{aligned}\frac{\partial\delta(\boldsymbol{k},\tau)}{\partial\tau} &+ \theta(\boldsymbol{k},\tau) \\ &= -\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}_1}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}_2}{(2\pi)^3}(2\pi)^3\delta_{\mathrm{D}}^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_{12}) \\ &\quad\times\alpha(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)\theta(\boldsymbol{k}_1,\tau)\delta(\boldsymbol{k}_2,\tau)\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\theta(\boldsymbol{k},\tau)}{\partial\tau} &+ \mathcal{H}(\tau)\theta(\boldsymbol{k},\tau) + \frac{3}{2}\Omega_{\mathrm{m}}\mathcal{H}^2(\tau)\delta(\boldsymbol{k},\tau) \\ &= -\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}_1}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}_2}{(2\pi)^3}(2\pi)^3\delta_{\mathrm{D}}^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_{12}) \\ &\quad\times\beta(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)\theta(\boldsymbol{k}_1,\tau)\theta(\boldsymbol{k}_2,\tau)\end{aligned} \tag{3}$$

となる。δ_{D}^3 は Dirac のデルタ関数を表す。また、$\boldsymbol{k}_{12} = \boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2$ で、

$$\alpha(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2) \equiv \frac{\boldsymbol{k}_{12}\cdot\boldsymbol{k}_1}{k_1^2} \tag{4}$$

$$\beta(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2) \equiv \frac{k_{12}^2(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_2)}{2k_1^2k_2^2} \tag{5}$$

である。

2.1 線形解

式 (2) と式 (3) を線形化した場合の形式的な解は、$\boldsymbol{x}$ 空間で、

$$\delta(\boldsymbol{x},\tau) = D_1^{(+)}(\tau)A(\boldsymbol{x}) + D_1^{(-)}(\tau)B(\boldsymbol{x}) \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\theta(\boldsymbol{x},\tau) = -\mathcal{H}(\tau)[&f(\Omega_{\mathrm{m}},\Omega_\Lambda)A(\boldsymbol{x})D_1^{(+)}(\tau) \\ &+g(\Omega_{\mathrm{m}},\Omega_\Lambda)B(\boldsymbol{x})D_1^{(-)}(\tau)]\end{aligned} \tag{7}$$

である。ここで $D_1^{+}(\tau)$ は成長モードの時間発展を表し (以降で単に D と書く)、$D_1^{-}(\tau)$ は減衰モードの時間発展を表す。$A(\boldsymbol{x})$、$B(\boldsymbol{x})$ は初期密度場を表す任意関数である。また、$f(\Omega_{\mathrm{m}},\Omega_\Lambda) \equiv \mathrm{d}\ln D_1^{(+)}/\mathrm{d}\ln a$、$g(\Omega_{\mathrm{m}},\Omega_\Lambda) \equiv \mathrm{d}\ln D_1^{(-)}/\mathrm{d}\ln a$ である。Ω_{m}、Ω_Λ は、それぞれ物質、宇宙定数に関する密度パラメータである。

2.2 非線形解

式 (2)、(3) から、

$$\delta(\boldsymbol{x},\tau) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\delta^{(n)}(\boldsymbol{x},\tau) \tag{8}$$

$$\theta(\boldsymbol{x},\tau) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\theta^{(n)}(\boldsymbol{x},\tau) \tag{9}$$

の形の解を求める。Einstein-de Sitter 宇宙 ($\Omega_{\mathrm{m}} = 1$、$\Omega_\Lambda = 0$) の場合、式 (8)、(9) を

$$\delta(\boldsymbol{k},\tau) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}a^n(\tau)\delta_n(\boldsymbol{k}) \tag{10}$$

$$\theta(\boldsymbol{k},\tau) = -\mathcal{H}(\tau)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}a^n(\tau)\theta_n(\boldsymbol{k}) \tag{11}$$

と書き、

$$\begin{aligned}\delta_n(\boldsymbol{k}) = \int&\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}'_1}{(2\pi)^3}\cdots\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}'_n}{(2\pi)^3} \\ &\times(2\pi)^3\delta_{\mathrm{D}}^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'_{1\cdots n}) \\ &\times F_n(\boldsymbol{k}'_1,\cdots,\boldsymbol{k}'_n)\delta_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{k}'_1)\cdots\delta_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{k}'_n)\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\theta_n(\boldsymbol{k}) = \int&\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}'_1}{(2\pi)^3}\cdots\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}'_n}{(2\pi)^3} \\ &\times(2\pi)^3\delta_{\mathrm{D}}^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'_{1\cdots n}) \\ &\times G_n(\boldsymbol{k}'_1,\cdots,\boldsymbol{k}'_n)\delta_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{k}'_1)\cdots\delta_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{k}'_n)\end{aligned} \tag{13}$$

とすると ($\boldsymbol{k}'_{1\cdots n} = \boldsymbol{k}'_1 + \cdots + \boldsymbol{k}'_n$)、$n \geq 2$ に対して、

$$F_n(\boldsymbol{k}'_1, \cdots, \boldsymbol{k}'_n) = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{G_m(\boldsymbol{k}'_1, \cdots, \boldsymbol{k}'_m)}{(2n+3)(n-1)} \binom{n}{m} \times[(2n+1)\alpha(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2) F_{n-m}(\boldsymbol{k}'_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{k}'_n) + 2\beta(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2) G_{n-m}(\boldsymbol{k}'_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{k}'_n)] \tag{14}$$

$$G_n(\boldsymbol{k}'_1, \cdots, \boldsymbol{k}'_n) = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{G_m(\boldsymbol{k}'_1, \cdots, \boldsymbol{k}'_m)}{(2n+3)(n-1)} \binom{n}{m} \times[3\alpha(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2) F_{n-m}(\boldsymbol{k}'_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{k}'_n) + 2n\beta(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2) G_{n-m}(\boldsymbol{k}'_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{k}'_n)] \tag{15}$$

という逐次関係式が得られる。ただし $\boldsymbol{k}_1 \equiv \boldsymbol{k}'_1 + \cdots + \boldsymbol{k}'_m, \boldsymbol{k}_2 \equiv \boldsymbol{k}'_{m+1} + \cdots + \boldsymbol{k}'_n, \boldsymbol{k} \equiv \boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2, F_1 = G_1 \equiv 1$ である。δ_{L} は線形 (初期) 質量密度ゆらぎである。F_n, G_n はカーネル (kernels) である。EdS 宇宙以外の宇宙でも、カーネルを求めることで密度場や速度場を式 (8)、(9) の形で近似できる。

3 統合摂動論

バイアスには、オイラーバイアスとラグランジュバイアスの 2 つがあるが、ここでは物理的に分かり易いラグランジュバイアスに重点を置く。

3.1 実空間でのラグランジュバイアス

初期のラグランジュ座標を $\boldsymbol{q}$、変位場を $\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{q}, t)$ とすると、共動座標 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{q}, t)$ は、

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{q}, t) = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{q}, t) \tag{16}$$

と書ける。$b_n^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{k}_1, \cdots, \boldsymbol{k}_n)$ を n 次のラグランジュバイアスとすると、観測対象 X の個数密度ゆらぎ $\delta_{\mathrm{X}}(\boldsymbol{k})$ は $\delta_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{k})$ を用いて、

$$\delta_{\mathrm{X}}(\boldsymbol{k}) = \sum_{n+m\geq 1}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i})^m}{n!m!} \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}_1}{(2\pi)^3} \cdots \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}_n}{(2\pi)^3} \times \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}'_1}{(2\pi)^3} \cdots \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}'_m}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta_{\mathrm{D}}^3(\boldsymbol{k}_{1\cdots n} + \boldsymbol{k}'_{1\cdots n} - \boldsymbol{k}) \times b_n^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{k}_1, \cdots, \boldsymbol{k}_n) \delta_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{k}_1) \cdots \delta_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{k}_n) \times[\boldsymbol{k} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Psi}}(\boldsymbol{k}'_1)] \cdots [\boldsymbol{k} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Psi}}(\boldsymbol{k}'_m)] \tag{17}$$

のように書ける。時間依存の引数は適宜省略している。例えば、$\delta(\boldsymbol{k}) = D(z)\delta_0(\boldsymbol{k})$ である。ここで、z は赤方偏移、$D(z)$ は線形成長因子、$\delta_0(\boldsymbol{k})$ は $z = 0$ における線形密度ゆらぎの値である。また、$D(z = 0) = 1$ である。$\boldsymbol{\Psi}$ のフーリエ成分表示にはチルダをつけることにする。さらに、

$$\tilde{\boldsymbol{\Psi}}(\boldsymbol{k}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}}{n!} \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}_1}{(2\pi)^3} \cdots \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}_n}{(2\pi)^3} \times(2\pi)^3 \delta_{\mathrm{D}}^3(\boldsymbol{k}_{1\cdots n} - \boldsymbol{k}) \times \boldsymbol{L}_n(\boldsymbol{k}_1, \cdots, \boldsymbol{k}_n) \delta_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{k}_1) \cdots \delta_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{k}_n) \tag{18}$$

と書くと ($\boldsymbol{L}_n$ はカーネル)、式 (17) は

$$\delta_{\mathrm{X}}(\boldsymbol{k}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}_1}{(2\pi)^3} \cdots \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}_n}{(2\pi)^3} \times(2\pi)^3 \delta_{\mathrm{D}}^3(\boldsymbol{k}_{1\cdots n} - \boldsymbol{k}) \times K_n(\boldsymbol{k}_1, \cdots, \boldsymbol{k}_n) \delta_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{k}_1) \cdots \delta_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{k}_n) \tag{19}$$

の形に書き直すことができる。K_1、K_2 は具体的に、

$$K_1(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{L}_1(\boldsymbol{k}) + b_1^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{k}) \tag{20}$$

$$K_2(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2) = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{L}_2(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2) + [\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{L}_1(\boldsymbol{k}_1)][\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{L}_1(\boldsymbol{k}_2)] + b_1^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{k}_1)[\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{L}_1(\boldsymbol{k}_2)] + b_1^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{k}_2)[\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{L}_1(\boldsymbol{k}_1)] + b_2^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2) \tag{21}$$

と書ける。

3.2 赤方偏移空間でのラグランジュバイアス

赤方偏移空間の共動座標 $\boldsymbol{s}$ は、実空間の共動座標 $\boldsymbol{x}$ と、

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{x} + \frac{v_z(\boldsymbol{x})}{aH} \hat{\boldsymbol{z}} \tag{22}$$

という関係で結ばれている。ここで $\hat{\boldsymbol{z}}$ は視線方向の単位ベクトル、v_z は $\hat{\boldsymbol{z}}$ 方向の速度である。

赤方偏移空間での変位場 $\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{s}}$ (s は赤方偏移空間での量であることを表す) を、式 (18) と同様に展開したときの n 次の量を $\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{s}(n)}$ とする。赤方偏移空間変形テンソルを

$$R_{ij}^{(n)} = \delta_{ij} + nf\hat{z}_i\hat{z}_j \tag{23}$$

としたとき ($f = \mathrm{d}\ln D/\mathrm{d}\ln a$)、$\Psi_i^{\mathrm{s}(n)} = R_{ij}^{(n)}\Psi_j^{(n)}$ となる。これと式 (18) から、

$$\boldsymbol{L}_n^{\mathrm{s}} = R^{(n)}\boldsymbol{L}_n \tag{24}$$

となることが分かる。ここで $R^{(n)}$ は $R_{ij}^{(n)}$ を行列として表した量である。したがって、$\boldsymbol{L}_n \to \boldsymbol{L}_n^s$ と置き換えることで、赤方偏移空間での $\delta_X^s(\boldsymbol{k})$ は、式 (19) と同様の表式 ($K_n \to S_n$) に従う。ここで、S_n は赤方偏移空間での K_n である。

3.3 多点プロパゲーターとパワースペクトル

δ_{X} の N 点ポリスペクトル $P_{\mathrm{X}}^{(N)}$ は、

$$\langle\delta_{\mathrm{X}}(\boldsymbol{k}_1)\cdots\delta_{\mathrm{X}}(\boldsymbol{k}_N)\rangle_{\mathrm{c}} = (2\pi)^3\delta_{\mathrm{D}}^3(\boldsymbol{k}_{1\cdots N})P_{\mathrm{X}}^{(N)}(\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_N) \tag{25}$$

と定義される。$\langle\cdots\rangle_{\mathrm{c}}$ はキュムラントを表す。δ_{L} についての N 点ポリスペクトル $P_{\mathrm{L}}^{(N)}$ も同様に定義される。$N=2$ の場合がパワースペクトル $P_{\mathrm{X}} = P_{\mathrm{X}}^{(2)}$、$P_{\mathrm{L}} = P_{\mathrm{L}}^{(2)}$ に対応する。物体 X についての n 次の実空間多点プロパゲータ $\Gamma_{\mathrm{X}}^{(n)}$ を

$$\Gamma_{\mathrm{X}}^{(n)}(\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_n) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}'_1}{(2\pi)^3}\cdots\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}'_m}{(2\pi)^3} \times K_{n+m}(\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_n,\boldsymbol{k}'_1,\cdots,\boldsymbol{k}'_m) \times\langle\delta_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{k}'_1)\cdots\delta_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{k}'_N)\rangle \tag{26}$$

とすると (赤方偏移空間では $K_{n+m} \to S_{n+m}$ とすればよい)、初期密度ゆらぎがガウシアンに従う場合のパワースペクトルは、多点プロパゲータにより、

$$P_{\mathrm{X}}(\boldsymbol{k}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}_1}{(2\pi)^3}\cdots\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}_m}{(2\pi)^3} \times(2\pi)^3\delta_{\mathrm{D}}^3(\boldsymbol{k}_{1\cdots n}-\boldsymbol{k}) \times|\Gamma_{\mathrm{X}}^{(n)}(\boldsymbol{k}_{1\cdots n}-\boldsymbol{k})|^2 P_{\mathrm{L}}(k_1)\cdots P_{\mathrm{L}}(k_n) \tag{27}$$

と表される。多点プロパゲータの評価は、繰り込みの方法による。

4 まとめと展望

4.1 まとめ

統合摂動論では、ハローが形成されるまでの密度ゆらぎの重力進化を、赤方偏移変形とバイアスの効果を含めて扱うことができる。また、これらの効果を考慮に入れた銀河パワースペクトルの評価も直接的にできる。

ハローモデルは、摂動論で扱うことのできない、ハロー形成に関わる小スケール領域を記述できる

4.2 展望

まずは統合摂動論とハローモデルを組み合わせた理論を構築する。ハロー内部での力学的性質が赤方偏移変形に大きな影響を及ぼすことが知られている (C. Hikage and K.Yamamoto (2013))。これらを組み合わせることで、理論テンプレートの精度向上が期待される。今後、具体的な理論テンプレートの構築、数値シミュレーションとの比較を行う。

謝辞

夏の学校に向けて、準備の段階から丁寧に指導をしてくださった岡アキラ氏、勉強会でアドバイスをして下さった吉田研・須藤研・横山研の皆様に深く感謝する。

Reference

T. Matsubara (2011). *Phys.Rev.D, 83*, 083518

F. Bernardeau et. al. (2002). *Phys. Rep. 367*, 1−248

C. Hikage and K.Yamamoto (2013). *arXiv:1303.3380v1*