

自己相似な重力凝縮による銀河・銀河団形成

辻 雄介 (大阪大学大学院 理学研究科)

Abstract

本講演では W. H. Press と P. Schechter の論文 (ApJ, **187**: 425-438) についてのレビューを行い、今後の研究計画についても触れていく。宇宙の進化により、銀河や銀河団がどれくらいの量だけ形成されるかは重要な問題である。ところが銀河団スケール以下の天体の形成には非線形成長が本質的であるため、解析的取り扱いの簡単な線形理論だけでこれを見積もることはできない。線形理論と非線形モデルを巧みに組み合わせることによって見積もろうとする試みが Press-Schechter 理論である。今後の展望として、Press-Schechter 理論は次世代観測や修正重力理論にも幅広く応用することが可能である。修正重力理論によって作り出されるボイド数を修正 Press-Schechter 質量関数によって予測し、次世代の弱重力レンズ効果の観測を想定した場合、修正重力理論をどの程度制限できるかを調べていきたい。

1 導入

宇宙の進化により、銀河や銀河団がどれくらい形成されるかは重要な問題である。しかし、銀河団スケール以下の天体形成では非線形成長が本質的である。そのため、解析的取り扱いの簡単な線形理論だけでこれを見積もることはできない。線形理論と非線形モデルを組み合わせることによって見積もろうとする手法が Press-Schechter 理論 (以下 PS 理論) であり、具体的には線形理論の外挿を用いて非線形な天体形成を現象論的に扱うことのできる理論である (W.H. Press and P.Schechter. 1974. ApJ, **187**: 425-438 (以下 PS74)). 特に銀河・銀河団形成を調べる現象論的モデルとして有効である。この理論の終着地は、Press-Schechter 質量関数 (以下 PS 質量関数) を導出することである。この関数は、数密度が質量の関数となっている。これを用いれば、天体の各質量に対する個数分布を知ることができ、天体形成を解析するのに非常に有効である。

さらに、この理論を拡張した、拡張 PS 理論により、天体形成や合体の歴史をモデル化したり、形成された天体の空間的な分布をモデル化する手法も開発されている。この拡張 PS 理論が予測するダークマターハロー形成率や空間分布は、時間的な発展も含めて N 体シミュレーションの結果をある程度よく再現している。

また、PS 理論は次世代観測や修正重力理論になど

幅広く応用されている。自身の研究と関連する先行研究としては、修正重力理論によって作り出されるボイド数を修正 PS 質量関数によって予測することができる。次世代の弱重力レンズ効果の観測を想定した場合、この理論を用いて修正重力理論をどの程度制限できるかを調べていきたい。

第 2 章では、1 節で原論文中の PS 理論について説明し、2 節で PS 理論の現在用いられている表式について説明する。第 3 章では今後の展望について先行研究を交えながら説明する。第 4 章では付録として、球対称崩壊モデルの説明を行う。

2 Press-Schechter 理論

2.1 原論文中の PS 理論 (PS74)

体積 V における質量 M の分散 Σ^2 は、

$$\Sigma^2(V) \equiv \langle M \rangle^2 - \langle M^2 \rangle \quad (1)$$

で定義される。ゆらぎ δ が正規分布に従うと仮定すると、ゆらぎが $[\delta, \delta + d\delta]$ の区間に存在する確率は、

$$p(\delta, V)d\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta_*^2}} \exp\left(-\frac{\delta^2}{2\delta_*^2}\right) d\delta \quad (2)$$

となる。いま、質量の分散の条件によって場合分けすることを考える。

a 分散が最大となる場合

全粒子の位置が独立かつランダムである場合、分散は体積に比例するので、 $\sigma^2 = \Sigma^2(V)/V$ とおける。ある質量 m をもつ物質に対する数密度 $n(m)$ と σ^2 との間には、

$$\sigma^2 = \int_0^\infty m^2 n(m) dm \quad (3)$$

となる関係がある。さらにここで、(2) の δ_* は、

$$\delta_*^2 \equiv \frac{\Sigma^2 V}{M^2} = \frac{\sigma^2}{\rho^2 V} \quad (4)$$

と定義する。ただし、 $M = \rho V$ とした。加えて、 δ を膨張スケール R_1 と R_2 を用いて、 $\delta = R_1/R_2$ で特徴づける。ただし、 R_1 は、過去のある時点での膨張スケールであり、 R_2 は R_1 以降の任意の時刻での膨張スケールである。これらを (2) に代入して、区間 $[\delta, \infty)$ にゆらぎが存在する確率は、

$$P = \int_{\delta=R_1/R_2}^\infty p(\delta, V) d\delta = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{R_1 \rho}{R_2 \sigma} \sqrt{\frac{V}{2}} \right) \quad (5)$$

ここで、 $\operatorname{erfc}(x)$ は相補誤差関数である。区間 $[M, dM]$ にゆらぎが存在する確率は、

$$\frac{dP}{dM} = \frac{1}{\sqrt{2^3 \pi}} \frac{R_1}{R_2} \sqrt{\frac{\rho_0}{\sigma_0^2 M}} \times \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \frac{\rho_0}{\sigma_0^2} M \right) \quad (6)$$

となる。よって、求める数密度 $n_2(M)$ は、

$$n_2(M) = \frac{2}{M} \rho_1 \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^3 \frac{dP}{dM} \quad (7)$$

で得られるので、

$$\rho_2 = \int_0^\infty m n_2(m) dm = \rho_1 \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^3 \quad (8)$$

$$\sigma_2^2 = \int_0^\infty m^2 n_2(m) dm = \sigma_1^2 \left(\frac{R_1}{R_2} \right) \quad (9)$$

を (7) に代入して、

$$n_2(M) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \left(\frac{\rho_2}{M} \right)^{2/3} \exp \left(-\frac{\rho_2}{2\sigma_2^2} M \right) \quad (10)$$

を得る。最後の形式は R_2, ρ_2, σ_2 という任意の時刻を表わす変数からなり、過去の状況に全く左右されず $n_2(M)$ が定まるということを意味している。

b 分散が最小となる場合・最大と最小の間の場合

空間を格子に区切り、各粒子に 1 つずつ粒子があると考える。その位置はランダムである。このとき、表面を横切る格子のみが分散に寄与する。すなわち分散は表面積に比例するので、

$$\Sigma^2(V) = \sigma^2 V^{2\alpha} \quad (11)$$

とおける。ただし、 $1/3 \leq \alpha \leq 1/2$ である。 $\alpha = 1/3$ が最小となる場合に対応している。先ほどと同様の論理で煮詰めてゆく。ここで、

$$\delta_*^2 \equiv \frac{\Sigma^2 V}{M^2} = \frac{\sigma^2}{\rho^{2\alpha}} M^{2(\alpha-1)} \quad (12)$$

と定義するならば、

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{R_1 \rho^\alpha M^{1-\alpha}}{\sqrt{2\sigma^2} R_2} \right) \quad (13)$$

であり、

$$\rho_2 = \rho_1 \left(\frac{R_1}{R_2} \right) \quad (14)$$

$$\sigma_2^2 = \sigma_1^2 \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{2(3\alpha-1)} \quad (15)$$

であり、これを (7) に代入して、

$$n_2(M) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} 2(1-\alpha) \left(\frac{\rho_2}{M} \right)^{1+\alpha} \times \exp \left(-\frac{\rho_2^{2\alpha}}{2\sigma_2^2} M^{2(1-\alpha)} \right) \quad (16)$$

を得る。これは、 $\alpha = 1/2$ のときに (10) に帰着する。最後の形式は、やはり過去の状況に全く左右されず $n_2(M)$ が定まるということを意味している。

2.2 現在用いられている形式 (松原 2010)

密度ゆらぎ δ が正規分布に従うと仮定すると、ゆらぎが区間 $[\delta, \delta + d\delta]$ にある確率は、

$$P(\delta) d\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2} \right) d\delta \quad (17)$$

与えられる。ここで、

$$\sigma^2 = \langle \delta^2 \rangle \quad (18)$$

は密度ゆらぎの分散である。線形密度ゆらぎ δ_L を用いて、質量スケールのゆらぎ δ_M を、

$$\delta_M(\mathbf{q}, t) = \frac{3}{4\pi R^3} \int_{|\mathbf{q}'-\mathbf{q}|\leq R} d^3q' \delta_L(\mathbf{q}', t) \quad (19)$$

ここで、 \mathbf{q} は、Lagrange 座標である。質量スケールのゆらぎは、

$$P(\delta_M) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(M)}} \exp\left(-\frac{\delta_M^2}{2\sigma^2(M)}\right) \quad (20)$$

なる正規分布に従う。PS 理論では、物質素片が質量 M 以上の天体の一部として取り込まれる条件として、球対称崩壊時に対応する線形ゆらぎ $\delta_c = 1.67$ を用いて、 $\delta_M > \delta_c$ となることが必要である (付録参照)。よって天体の一部として取り込まれる確率は、

$$\begin{aligned} P_{>\delta_c}(M) &= \int_{\delta_c}^{\infty} P(\delta_M) d\delta_M \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\delta_c/\sigma(M)}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \end{aligned} \quad (21)$$

で与えられる。ここで、 $x = \delta_M/\sigma$ である。よって、区間 $[M, M + dM]$ にある天体の全質量は、天体の数密度 $n(M)$ を用いて、

$$\begin{aligned} n(M)M dM &= 2\rho_0 |P_{>\delta_c}(M) - P_{>\delta_c}(M + dM)| \\ &= 2\rho_0 \left| \frac{dP_{>\delta_c}}{d\sigma(M)} \right| \left| \frac{d\sigma(M)}{dM} \right| dM \end{aligned} \quad (22)$$

となる。 ρ_0 は共同座標での平均質量密度である。一度形成した天体がそれより大きな天体に再び取り込まれる問題 (クラウド・イン・クラウド問題) を解決するために係数 2 をつけた。よって、PS 質量関数は、

$$\begin{aligned} n(M) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\rho_0}{M^2} \left| \frac{d\{\log \sigma(M)\}}{d(\log M)} \right| \frac{\delta_c}{\sigma(M)} \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{\delta_c^2}{2\sigma(M)^2}\right) \end{aligned} \quad (23)$$

と与えられる。いま、もし質量揺らぎの分散がべき乗則、

$$\sigma(M) = \left(\frac{M}{M_0}\right)^{-\alpha} \quad (24)$$

に従うなら、(23) は、

$$\begin{aligned} n(M) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\rho_0 \alpha}{M_*^2} \left(\frac{M}{M_*}\right)^{\alpha-2} \\ &\quad \times \exp\left(-\left(\frac{M}{M_*}\right)^{2\alpha}\right) \end{aligned} \quad (25)$$

と変形できる。ここで、

$$M_* = \left(\frac{2}{\delta_c^2}\right)^{1/2\alpha} M_0 \quad (26)$$

である。質量が M_* より大きな天体の相対的な数は急速に減っているのがわかる。

3 研究との関係

PS 理論は幅広く応用されている。たとえば、 $\delta_c \rightarrow |\delta_v|$ とすれば、ポイドにも PS 理論を適用できる (Y.Higuchi, M.Oguri and T.Hamana. 2013. MNRAS accepted, arXiv: 1211.5966)。図 1 は、縦軸にポイドの数密度、横軸に質量をとったグラフである。エラーバーのついた黒い点は、シュミレーションから得られたポイドの質量関数である。青い点線は、修正 PS 質量関数である。修正 PS 理論はポイドの質量関数を程度再現していることがわかる。この枠組みを用いれば、ポイド数分布を解析することができる。

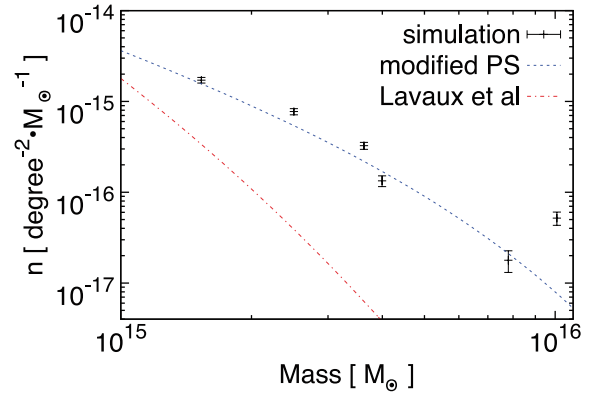


図 1: ポイドの質量関数と修正 PS 質量関数

また、修正重力理論ではポイドの数密度は変化する (B.Li, G.B.Zhao and K.Koyama. 2012. MNRAS, 421: 3481-3487)。図 2 は、縦軸にポイドの数密度、横軸に体積をとったグラフである。黒の四角マークの線は Λ CDM モデルにおけるポイド数分布である。他の線はそれぞれ別々の修正重力下での場合である。 $|f_{R0}|$ は、重力の修正の強度を表わす。このように、重力が修正されるとポイド数分布が変わる。

これらの先行研究から、今後の展望として、次世代の弱重力レンズ効果の観測を想定した場合、修正重力理論をどの程度制限できるかを調べていきたい。修正重力下でのボイド数分布は、修正 PS 質量関数で予測できるので、それと観測結果を照らし合わせればよい。

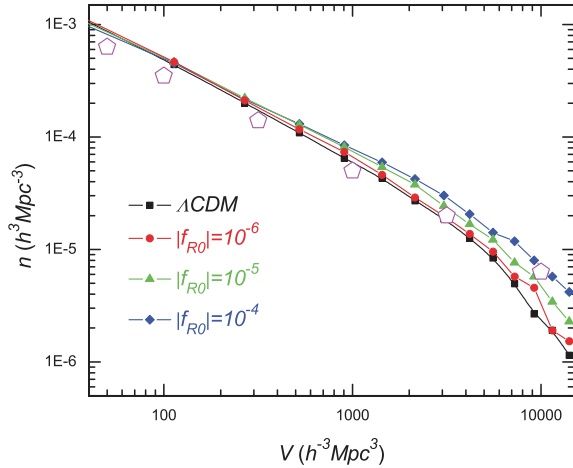


図 2: ボイド数分布と修正重力

付録

球対称崩壊モデル

近似的に非線形構造形成を調べるために、簡単なモデルとしてよく用いられるのが球対称崩壊モデルである。このモデルではある点まわりに質量が球対称に分布することを考える。以下では簡単のため、宇宙定数と曲率を無視して、Einstein-de Sitter 宇宙の場合を考える。一般の場合も、本質的には以下と同様に解析できる。

半径 R にある質量 M の球殻内にある物質の運動方程式は、

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{GM}{R^2} \quad (27)$$

で与えられる。(27) を積分して、

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{2GM}{R} + 2E \quad (28)$$

となる。 E は単位質量当たりの全エネルギーに対応し、 $E < 0$ が束縛解、 $E > 0$ が非束縛解に対応する。さらに計算を押し進めて、

(I) $E < 0$ のとき

$$\begin{cases} R = (GM)^{1/3} A^2 (1 - \cos \theta) \\ t = A^2 (\theta - \sin \theta) \end{cases} \quad (29)$$

(II) $E > 0$ のとき

$$\begin{cases} R = (GM)^{1/3} A^2 (\cosh \theta - 1) \\ t = A^2 (\sinh \theta - \theta) \end{cases} \quad (30)$$

となる。よって、Einstein-de Sitter 宇宙における球殻内密度のゆらぎ $\delta = \rho/\bar{\rho} - 1$ は、

(I) $E < 0$ のとき

$$\delta(t) = \frac{9}{2} \frac{(\theta - \sin \theta)^2}{(1 - \cos \theta)^3} - 1 \quad (31)$$

(II) $E > 0$ のとき

$$\delta(t) = \frac{9}{2} \frac{(\sinh \theta - \theta)^2}{(\cosh \theta - 1)^3} - 1 \quad (32)$$

となる。非束縛解 ($E > 0$) は密度が時間とともに単調に減少し、天体形成に対応しない。束縛解では、中心点 $R = 0$ に収束する崩壊点は、 $\theta = 2\pi$ に対応し、そのとき、 $t_c = \pi A^3$ となり密度ゆらぎは発散する。(29) と (31) を θ の最低次まで Maclaurin 展開し、 θ を消去して得られるゆらぎ δ_L は、

$$\delta_L(t) = \frac{3(6t)^{2/3}}{20A^2} \quad (33)$$

となる。よって、 t_c を代入すれば、

$$\delta_L(t_c) \simeq 1.69 \quad (34)$$

である。すなわち、密度ゆらぎが 1.69 を超えたとき、ゆらぎが崩壊して密度が無窮大となる。他の宇宙モデルの場合でも、この値はさほど変わらない。

Reference

- W.H. Press and P.Schechter. 1974. ApJ, **187**: 425-438
 松原 隆彦 2010. 東京大学出版会, 『現代宇宙論 一時空と物質の共進化』
 Y.Higuchi, M.Oguri and T.Hamana. 2013. MNRAS accepted, arXiv: 1211.5966
 B.Li, G.B.Zhao and K.Koyama. 2012. MNRAS, **421**: 3481-3487