

コンパクト連星の軌道決定に対する統計的手法

山田 慧生 (弘前大学大学院 理工学研究科)

Abstract

私は、浅田秀樹（弘前大）、郷田直輝および山口正輝（国立天文台）諸氏との共同研究である、コンパクト連星の軌道決定に対する統計的手法について議論する。

X 線や γ 線連星の伴星の正体は、中性子星なのかブラックホールなのか、未だ確定するに至っていない。この正体をつきとめるには、連星の軌道要素決定が重要な鍵となる。位置天文連星に対する従来の軌道決定法 (Asada *et al.* 2004; Asada 2008) の、実用上の問題を解決するために考案された統計的手法 (Iwama *et al.* 2013) は位置測定の標準誤差 σ が軌道長半径 a_K より小さい場合に有効である。一方で、 $\sigma > a_K$ の場合には軌道要素の決定精度が悪くなるという問題があった。そこで今回、計算速度をあまり損なうことなく観測時刻の情報を取り入れることで決定精度を飛躍的に向上した。

1 Introduction

X 線や γ 線連星は、伴星に中性子星あるいはブラックホールを持つと考えられており、高密度星近傍の物理情報が得られる重要な天体である。しかし、伴星の正体は、中性子星なのかブラックホールなのか、未だ確定するに至っていない。伴星の正体を判定するためには、その質量を見積もる必要がある。

Kepler 運動する天体は Kepler の第 3 法則より

$$\left(\frac{2\pi}{P_K}\right)^2 = \frac{GM_{\text{tot}}}{a^3}, \quad (1)$$

の関係がある。ここで、 P_K は連星の軌道周期、 G は重力定数、 $M_{\text{tot}} = M_S + M_C$ は連星の総質量、 M_S 、 M_C はそれぞれ主星、伴星の質量である。また、 a は一方の天体から見たもう一方の天体の軌道長半径である。 a と連星の共通重心から見た主星の軌道長半径 a_S との関係は $a_S = (M_C/M_{\text{tot}})a$ であるから、伴星の質量について

$$M_C = \left(\frac{4\pi^2}{G}\right)^{1/3} \left(\frac{M_{\text{tot}}}{P_K}\right)^{2/3} a_S, \quad (2)$$

という関係を得る。すなわち、軌道周期、総質量、主星の軌道長半径がわかれば、伴星の質量を見積もることが出来る。軌道周期や総質量はすでに様々な観測から見積もられており¹、軌道長半径の決定が重要な課題である。

¹例えば、Cyg-X1 については (Brocksopp *et al.* 1999; Orosz *et al.* 2011)。

伴星が観測されないような連星、すなわち、位置天文的連星の従来の軌道決定法 (Asada *et al.* 2004; Asada 2008) は、観測データの信号雑音 (S/N) 比の非常に高い必要があり、また、観測の時間間隔が連星の軌道周期よりも大きい場合には不向きであるという問題もあった。これらの問題を解決すべく考案された統計的手法 (Iwama *et al.* 2013) は、JASMINE 計画を想定して多数の観測データを用いる。そのため、観測の標準誤差が軌道長半径程度かそれ以下の場合に有効であり、従来の手法が有効でないコンパクト連星に対しても効果を発揮する。しかしながら、その一方で、観測誤差が非常に大きくなると決定精度が悪くなるという問題が残されていた。そこで我々は、統計的手法において、計算速度をあまり損なうことなく観測時刻の情報を取り入れることで決定精度を大きく向上した。

2 従来の軌道決定法と統計的手法

具体的な計算は文献に譲り、簡単に概要のみ説明する。従来の軌道決定法では、天球面上における 4 つの観測点とその観測時刻から面積速度一定の法則を用いて軌道要素を決定する (図 1 参照)。4 つの観測点のうち独立な 2 つの組み合わせは 3 通りがあり、組み合わせ 1 つあたりに 2 つの拘束条件があるため、6 つの軌道要素 (軌道周期 P_K 、離心率 e_K 、軌道長

半径 a_K , 軌道傾斜角 i , 離心近点角 ω および昇交点赤経 Ω が決定される。しかし, 前述した通り, この手法は観測点の決定誤差が軌道長半径よりも十分小さい必要があり, また, 観測の時間間隔が軌道周期よりも大きい場合には不向きであるという問題がある。

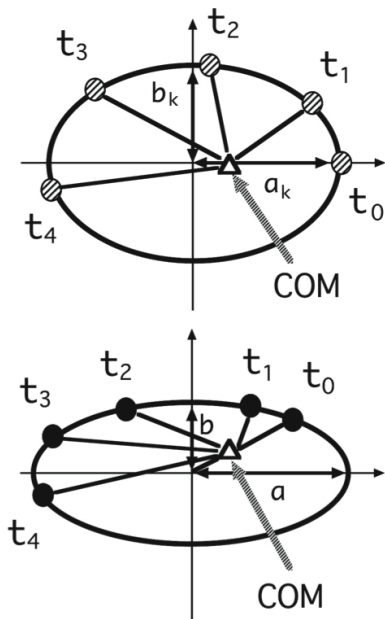


図 1: 上図が真の軌道, 下図が天球面に射影された見かけの楕円. t_1, t_2, t_3 および t_4 は観測点. t_0 は近点の通過時刻. Asada (2008) より引用.

これらの問題を解決するものとして, 多数の観測点を用いた統計的手法がある. この手法では, 天球面上における観測点の散らばり具合 (モーメント) から軌道要素を決定する (図 2 参照). すなわち, 天球面上の Descartes 座標 (x, y) における多数の観測点 $P_i = (x_i, y_i)$, ($i = 1, 2, \dots$) から 2 次のモーメント M_{xx}, M_{yy}, M_{xy} および 3 次のモーメント $M_{xxx}, M_{yyy}, M_{xxy}, M_{xyy}$ を計算し, そこから軌道周期以外の 5 つの軌道要素を決定する. また, 軌道周期は, 観測点と観測時刻から Fourier 解析によって得られる. この手法の利点として, モーメントの算出において時刻情報を必要としないため, 観測の時間間隔に対して軌道周期が小さい場合にも有用であることが挙げられる。

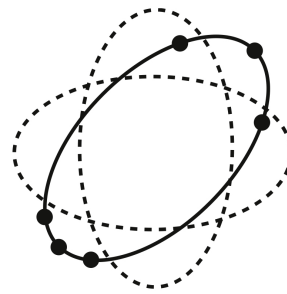


図 2: 3 つの軌道を区別するために 2 次のモーメント M_{xx}, M_{yy}, M_{xy} が必要である. さらに, 近点 (図では実線の右上) 付近は速く通過するため観測点は少なくなるので, 共通重心の位置を区別出来る (3 次のモーメント). 図は Iwama *et al.* (2013) より引用.

3 統計的手法の問題点

統計的手法を用いる際, 観測の標準誤差を σ とすると, n_{tot} 個の観測点から求められるモーメントは

$$M_{xx}^O = M_{xx}^T + O(\sigma^2) + O\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n_{tot}}}\right), \quad (3)$$

$$M_{yy}^O = M_{yy}^T + O(\sigma^2) + O\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n_{tot}}}\right), \quad (4)$$

$$M_{xy}^O = M_{xy}^T + O\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n_{tot}}}\right), \quad (5)$$

$$M_{xxx}^O = M_{xxx}^T + O\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n_{tot}}}\right) + O\left(\frac{\sigma^3}{\sqrt{n_{tot}^3}}\right), \quad (6)$$

$$M_{yyy}^O = M_{yyy}^T + O\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n_{tot}}}\right) + O\left(\frac{\sigma^3}{\sqrt{n_{tot}^3}}\right), \quad (7)$$

$$M_{xxy}^O = M_{xxy}^T + O\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n_{tot}}}\right) + O\left(\frac{\sigma^3}{\sqrt{n_{tot}^3}}\right), \quad (8)$$

$$M_{xyy}^O = M_{xyy}^T + O\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n_{tot}}}\right) + O\left(\frac{\sigma^3}{\sqrt{n_{tot}^3}}\right), \quad (9)$$

となることが推定出来る. ここで, 上付き添字の O と T はそれぞれ観測から求まる値と真の値を表す. したがって, 分散 σ^2 が大きければ, n_{tot} が十分大きくても M_{xx}^O, M_{yy}^O の誤差は無視出来ず, 軌道要素の決定精度は悪くなる. この問題を解決するためには, モーメントに用いる観測点の標準誤差を小さくする必要があり.

4 統計的手法の改良

観測点の標準誤差を小さくするために、観測点と観測時刻の対応を考えることにする。多くの場合、軌道周期 P_K はすでに精度よくわかっている。よって、観測期間が軌道周期よりも十分長く、 n_s 周期分の観測データが揃っている場合には、ある時刻 t の観測点と n 周期後の時刻 $t + nP_K$ における観測点は同一点とみなすことが出来る。そこで、軌道上の同一点の n_s 個ある観測データを平均すると、その観測点の標準誤差は小さくなり、得られるモーメントは

$$M_{xx}^O = M_{xx}^T + O\left(\frac{\sigma^2}{n_s}\right) + O\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n_{\text{tot}}}}\right), \quad (10)$$

$$M_{yy}^O = M_{yy}^T + O\left(\frac{\sigma^2}{n_s}\right) + O\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n_{\text{tot}}}}\right), \quad (11)$$

となる。すなわち、 n_s が十分大きければ、モーメントの誤差は無視出来る。しかし、実際の観測期間では、一般に、モーメントの誤差を無視出来るほど十分な n_s を得ることは難しい。

そこで、もう一つの可能性を考えよう。モーメントの誤差が無視出来ないほど観測点の標準誤差が大きい場合、観測時刻の近い観測点は、その誤差の範囲で同一点と考えても良いだろう²。したがって、周期上のある時刻 t における観測点と近傍の他の時刻 t' における観測点を同一点とみなし平均をとることで、観測点の標準誤差を小さくすることが可能である。この時、観測誤差に比べて、近傍の観測点との時刻差 $|t - t'|/P_K$ が小さいことが必要である。果たして、この時 n_s を稼ぐことと同じ効果が得られて、平均に用いる近傍の観測点数を n_a とすると得られるモーメントは

$$M_{xx}^O = M_{xx}^T + O\left(\frac{\sigma^2}{n_a}\right) + O\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n_{\text{tot}}}}\right), \quad (12)$$

$$M_{yy}^O = M_{yy}^T + O\left(\frac{\sigma^2}{n_a}\right) + O\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n_{\text{tot}}}}\right), \quad (13)$$

となる。

以上によって、観測データが十分多ければ、 n_s が n_a 、あるいはその両方を大きくすることが出来る。したがって、モーメントの、ひいては軌道要素の決定精度を向上することが可能である。

²これは、しかし、観測精度が十分良い場合には、区別されるべきものであることに注意する必要がある。

5 統計的手法と改良版の比較

最後に、数値テストによって全観測数 $n_{\text{tot}} = 10000$ の場合の統計的手法と改良版を比較しよう。真の軌道要素をそれぞれ $e_k = 0.1$, $a_k = 1.0$, $i = \omega = \Omega = 30[\text{deg.}]$ とし、統計的手法 ($n_p = n_a = 1$), $n_s = 100$, $n_a = 100$ のそれぞれの場合において観測点の標準誤差 $\sigma = 1, 2$ で比較した。また、スペース削減のため、特に重要な軌道長半径のみ記す。

σ	method	a_k
1	$n_s = n_a = 1$	$1.0 + 0.729967 \pm 0.011653$
	$n_s = 100$	$1.0 + 0.0117126 \pm 0.0127576$
	$n_a = 100$	$1.0 + 0.00972436 \pm 0.0144095$
2	$n_s = n_a = 1$	$1.0 + 2.00265 \pm 0.01937$
	$n_s = 100$	$1.0 + 0.0461758 \pm 0.0247449$
	$n_a = 100$	$1.0 + 0.0411724 \pm 0.0286414$

下図は灰色が観測点、青が真の軌道、橙と赤はそれぞれ統計的手法、改良版で求めた軌道である。真の軌道と改良版で求めた軌道が重なっていることが確認出来る。左図が統計的手法と $n_s = 100$ の場合、右図が統計的手法と $n_a = 100$ の場合との比較である。

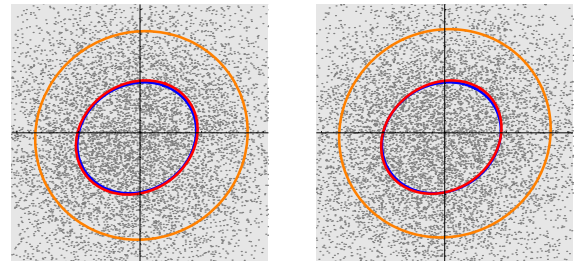


図 3: $\sigma = 1$.

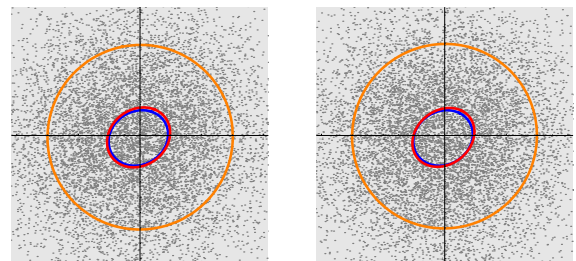


図 4: $\sigma = 2$.

6 結論

位置天文連星に対する従来の軌道決定法 (Asada *et al.* 2004; Asada 2008) の, 実用上の問題を解決するために考案された統計的手法 (Iwama *et al.* 2013) は位置測定の標準誤差 σ が軌道長半径 a_K より小さい場合には非常に有効である. 一方で, $\sigma > a_K$ の場合にはモーメントの誤差が無視出来ず, 軌道要素の決定精度が悪くなるという問題があった. そこで, 観測点と観測時刻の対応を考慮することで決定精度を向上した.

このことから, 位置天文的連星の伴星の質量を良い精度で見積もることが可能となり, その正体が中性子星なのかブラックホールなのかを判定出来ると期待される. また, これは伴星の降着円盤からの放射モデルに頼らないブラックホールの質量決定法を与えるだけでなく, ここから, X 線や γ 線の放射モデルに制限が与えられる可能性も考えられる.

Reference

- H. Asada, T. Akasaka, M. Kasai, PASJ 56, L35 (2004).
- H. Asada, PASJ 60, 843 (2008).
- C. Brocksopp, A. E. Tarasov, V. M. Lyuty, P. Roche, A&A 343, 861 (1999).
- H. Iwama, H. Asada, and K. Yamada, PASJ 65, 2 (2013).
- J. A. Orosz, J. E. McClintock, J. P. Aufdenberg, R. A. Remillard, M. J. Reid, R. Narayan, and L. Gou, ApJ 742, 84 (2011).