

強磁場における電子プロパゲータの様々な表式

矢田部 彰宏 (早稲田大学大学院 先進理工学研究科)

Abstract

中性子星の中でも、非常に強い磁場をもつものをマグネターという。マグネター周辺の超強磁場での現象を理解するためには、超強磁場における物理過程を理解しなければならない。本研究では、磁場中の量子電磁力学的な物理過程にとって必要な電子のプロパゲータ (伝播関数) を複数の表式で表した。また、超強磁場特有の物理過程である複屈折の表式に関して考察を行い、最近発表された表式と従来の表式の関連を理解することができた。

1 導入

1.1 マグネターでの物理過程

中性子星のなかでも非常に強い磁場 ($B \sim 10^{14} - 10^{15} \text{G}$) をもつものをマグネター (magnetar) という。マグネターは、X 線やガンマ線を繰り返し放出する軟ガンマ線リピータ (SGR) や SGR と同じようなスペクトルが観測され、X 線パルサーであるが、通常は伴うはずである伴星を伴わない異常 X 線パルサー (AXP) として観測される。

このような超強磁場のもとでは、電子のサイクロトロン運動エネルギーが電子の静止質量エネルギーと同じオーダーになる。そのような状況では、量子電磁力学 (Quantum Electrodynamics, QED) 的な過程が起こる。例えば、光子の偏光状態によって光子の進む向きが変わる birefringence (複屈折)

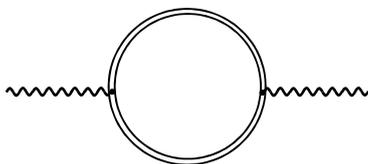


図 1: birefringence のファインマン図

や光子が分裂する photon splitting

$$\gamma \rightarrow \gamma + \gamma$$

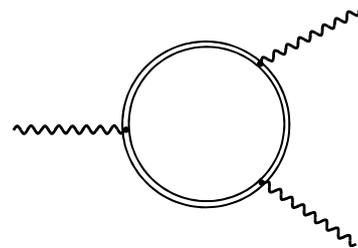


図 2: photon splitting のファインマン図

が起こる。これらの現象に関しては、40 年前から研究されていて今なお研究が続いている。

マグネターで起こる現象の起源は、マグネター自体の強磁場であると考えられている。そのため、マグネターで起こる現象を理解するためには、強磁場中の光子や電子などの物理過程 (photon splitting など) を理解し、それらの物理過程の反応率を求めなければならない。本研究では、複屈折を扱うために必要なプロパゲータを複数の表式で求め、それによって表された複屈折に関して考察する。

1.2 強磁場中での電子のプロパゲータ

自由場の電子のプロパゲータは、

$$G(x_i, x_f) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x_f - x_i)} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (1)$$

と表わされる。ただし、 $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$ で、 γ^μ は Dirac のガンマ行列を表す。以下では、スラッシュはガンマ行列が作用したものとして表す。このとき、プロパゲータ $G(x_i, x_f)$ は、

$$G(x_i, x_f) = -i \langle 0 | T(\psi(x_f) \bar{\psi}(x_i)) | 0 \rangle \quad (2)$$

と表され、

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu^i - m)G(x_i, x_f) = \delta(x_i - x_f) \quad (3)$$

を満たす。

そこに外場として電磁場 A があると、プロパゲータは、

$$\begin{aligned} & G_A(x_i, x_f) \\ &= G(x_i, x_f) \\ &+ \int d^4x_1 G(x_1, x_f) (-e \not{A}(x_1)) G(x_i, x_1) \\ &+ \int \int d^4x_1 d^4x_2 G(x_2, x_f) \\ &\quad \times (-e \not{A}(x_2)) G(x_1, x_2) (-e \not{A}(x_1)) G(x_i, x_2) \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (4)$$

のように電磁場は摂動として表わせる。このとき、 A が小さければ、3 項目からは無視できるが、強磁場における電子のプロパゲータでは、 A が非常に大きいので、 A を摂動とみなすことができない。そのため、磁場中の電子のプロパゲータを厳密に求めなければならない。

1.3 複屈折

複屈折は真空偏極テンソル

$$i\Pi(q) = (-ie)^2 (-1) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \times \text{Tr} [\gamma^\mu G(p) \gamma^\nu G(p+q)] \quad (5)$$

$$i\Pi(x-x') = (-ie)^2 (-1) \times \text{Tr} [\gamma^\mu G(x, x') \gamma^\nu G(x', x)] \quad (6)$$

で表される。 $G(p)$ 、 $G(x, x')$ は電子のプロパゲータである。

電子のプロパゲータは表し方によっては、反応率の計算結果などに発散が現れるので、複数の表式を知っていることは重要である。

2 方法

本研究では 2 種類の方法で電子のプロパゲータを求める。

方法 1: Schwinger の proper time method (Schwinger. 1951)

方法 2: Dirac 方程式の解を用いる方法 (Melrose and Parle. 1983)

2.1 方法 1: Schwinger の proper time method

プロパゲータ $G(x, x')$ が満たす式は、

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu) - m\mathbf{1}]G(x, x') = \delta(x - x') \quad (7)$$

である。 $G(x, x')$ を演算子 G の行列要素と考えると、

$$(\gamma \hat{\Pi} - m\mathbf{1})G = \mathbf{1} \quad (8)$$

ただし、 $\hat{\Pi}_\mu = \hat{p}_\mu - eA_\mu$ である。プロパゲータを解くために、 G を積分表示する。

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{\gamma \hat{\Pi} - m\mathbf{1}} \\ &= (-\gamma \hat{\Pi} - m\mathbf{1}) \\ &\quad \times i \int_0^\infty ds \exp[-i(m^2\mathbf{1} - (\gamma \hat{\Pi})^2)s] \end{aligned} \quad (9)$$

このとき、 s を proper time という。ここでプロパゲータ $G(x, x')$ は、

$$\begin{aligned} & G(x, x') \\ &= \langle x | G | x' \rangle \\ &= \langle x | (-\gamma \hat{\Pi} - m\mathbf{1}) \\ &\quad \times i \int_0^\infty ds \exp[-i(m^2\mathbf{1} - (\gamma \hat{\Pi})^2)s] | x' \rangle \\ &\quad + \langle x | -m \exp[-i(-(\gamma \hat{\Pi})^2)s]_{ab} | x' \rangle \end{aligned} \quad (10)$$

と表わせるが、

$$\mathcal{H} = -(\gamma \hat{\Pi})^2 \quad (11)$$

とすると

$$\begin{aligned} & \langle x | -\gamma \hat{\Pi} \exp[-i(-(\gamma \hat{\Pi})^2)s] | x' \rangle \\ &= \langle x | \exp[-i\mathcal{H}s] - \gamma \hat{\Pi} | x' \rangle \\ &= \langle x(s) | -\gamma \hat{\Pi} | x'(0) \rangle \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
 & \langle x | -m \exp[-i(-(\gamma\Pi)^2)s] | x' \rangle \\
 &= -m \langle x | \exp[-i\mathcal{H}s] | x' \rangle \\
 &= -m \langle x(s) | x'(0) \rangle \quad (13)
 \end{aligned}$$

のように \mathcal{H} をハミルトニアンと見ると、 $\exp[-i\mathcal{H}s]$ は時間発展演算子と見ることができ、 $x(s)$ 、 $\Pi(s)$ を解くことができる。このように量子電気力学の問題を量子力学の問題に落とし込んで解くことができる。

2.2 方法 2: Dirac 方程式の解を用いる方法

プロパゲータの定義の表式に、

$$G(x, x') = -i \langle 0 | T \{ \hat{\psi}(x) \hat{\bar{\psi}}(x') \} | 0 \rangle \quad (14)$$

というのがある。ただし、

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 \quad (15)$$

を表す。電磁場中の荷電粒子の Dirac 方程式の解を求めてこの表式に代入すれば、プロパゲータが求まる。解 $\psi(x)$ は、Dirac 方程式

$$(i \not{\partial} - e \not{A} - m) \psi(x) = 0 \quad (16)$$

を解くことによって得られる。

3 結果

3.1 方法 1 による結果

Proper time method を用いた場合でも、複数の表式があるが、今回は考察のために、電荷 e を持つフェルミオンの外場 A 中の運動量空間でのプロパゲータ

$$\begin{aligned}
 G(p) &= i(\not{p} - e \not{A} + m) \frac{1}{i} \int_0^\infty ds \\
 &\quad \times \exp(is \{ (\not{p} - e \not{A})^2 - m^2 \}) \\
 &= \int_0^\infty ds [\not{p} - e\gamma^\mu F_{\mu\nu} X^{\nu\sigma}(s) p_\sigma + m] \\
 &\quad \times e^{-i\kappa^2 s + ip_\mu X^{\mu\nu}(s) p_\nu + Y(s)} \quad (17)
 \end{aligned}$$

と表されることを使う。proper time method で求めたプロパゲータの表式は、積分で表されることがわかる。

3.2 方法 2 による結果

プロパゲータは、

$$\begin{aligned}
 G(x, x') &= -i \sum_{n=0}^\infty \\
 &\quad \times (i\partial_\mu \gamma^\mu - eA_\mu \gamma^\mu + m) \\
 &\quad \times \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{d\mu}{\mu} \\
 &\quad \times \exp\left(-\frac{i}{2}\rho^2 \mu - \frac{im^2}{2\mu}\right) \exp\left(-i\frac{eB}{\mu}n\right) \\
 &\quad \times \left\{ \frac{1}{2}(1 + \sigma_z) \frac{eB}{2\pi} \phi(x, x') \right. \\
 &\quad \times \exp\left(-\frac{1}{4}\lambda^2\right) L_{n-1}\left(\frac{1}{2}\lambda^2\right) \\
 &\quad + \frac{1}{2}(1 - \sigma_z) \frac{eB}{2\pi} \phi(x, x') \\
 &\quad \left. \times \exp\left(-\frac{1}{4}\lambda^2\right) L_n\left(\frac{1}{2}\lambda^2\right) \right\} \quad (18)
 \end{aligned}$$

となる。ただし、

$$\phi(x, x') = \exp\left(-ie \int_x^{x'} dx_\mu A^\mu(x)\right) \quad (19)$$

$$\lambda^2 = eB\{(x - x')^2 + (y - y')^2\} \quad (20)$$

で L_n は Laguerre 多項式である。

このとき、 neB は Landau 準位

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{eB}{m} \quad (21)$$

によるものである。したがって、 n の無限和で表わされたプロパゲータは、Landau 準位の無限和で表されたものである。このように、Dirac 方程式の解からプロパゲータを計算する方法では、積分の無限和で表されることがわかる。

4 考察

今まで求めたプロパゲータを用いて、真空偏極テンソルの表式について考察する。真空偏極テンソルは一般的に

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = -(\chi_0 P_0^{\mu\nu} + \chi_1 P_1^{\mu\nu} + \chi_2 P_2^{\mu\nu}) \quad (22)$$

のように 3 つの成分に分けて書くことができる。真空偏極テンソルはプロパゲータの積で表されるので、通常プロパゲータの表式が積分のみで表されていれば、真空偏極テンソルの表式の χ_i ($i = 0, 1, 2$) は二重積分で表される。ところが、(Hattori and Itakura, 2013) によると Schwinger の proper time method から求めたプロパゲータを用いて、二重積分で表わされた真空偏極テンソルが二重和で表わされることがわかった。

$$\chi_i = \frac{\alpha B_r}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2 - \delta_{n0}) \times \left[\sum_{l=0}^{\infty} \Omega_{li}^{n(0)} + \sum_{l=1}^{\infty} \Omega_{li}^{n(1)} + \sum_{l=2}^{\infty} \Omega_{li}^{n(2)} \right] \quad (23)$$

ここでは、無限和がプロパゲータのどこから現れたかについて、先ほどの 2 種類のプロパゲータの表式を使って、考察していく。

Proper time method で求めたプロパゲータによる真空偏極テンソルの χ_i は

$$\chi_i(r_{\parallel}^2, r_{\perp}^2; B_r) = \frac{\alpha}{4\pi} \int_{-1}^1 d\beta \int_0^{\infty} d\tau \times \frac{\Gamma_i(\tau, \beta)}{\sin \tau} e^{-iu \cos(\beta\tau)} e^{i\eta \cot \tau} e^{-i\phi_{\parallel} \tau} \quad (24)$$

と表される。(Hattori and Itakura, 2013) によると

$$e^{-iu \cos(\beta\tau)} e^{i\eta \cot \tau} \quad (25)$$

の部分から Landau 準位の重ね合わせの項が出てくる。プロパゲータの表式では、

$$\exp \left[-\frac{i}{4} (x - x') eF \coth(eFs) (x - x') \right] \quad (26)$$

に対応している。proper time method で求めたプロパゲータに関して $s = 1/2\mu$ と変数変換すると、Landau 準位の和で表わしたプロパゲータが求められることから、これが、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp \left(-i \frac{eB}{\mu} n \right) L_n \left(\frac{\lambda^2}{2} \right) \quad (27)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp \left(-i \frac{eB}{\mu} n \right) L_{n-1} \left(\frac{\lambda^2}{2} \right) \quad (28)$$

に対応することがわかる。さらにこれらは

$$\sum_{\sigma=\pm 1} \int dp_y dp_z \psi(x) \bar{\psi}(x') \quad (29)$$

の部分から現われることがわかった。

5 結論

本研究では磁場中の電子のプロパゲータを複数の表式

1. proper time s の積分で表された式

2. Laguerre 多項式の積分の無限和で表された式

で表すことができた。

また、真空偏極テンソルはプロパゲータの積で表されるので、プロパゲータが積分で表されていれば、真空偏極テンソルは二重積分に、プロパゲータが和で表されていれば、真空偏極テンソルは二重和で表されるが、これらの関係を考察した。本研究では、真空偏極テンソルの表式の Landau 準位の和が波動関数の積をスピンに関して和をとり、 p_y 、 p_z で積分することにより現われることがわかった。

Reference

坂井典佑. 2002. 場の量子論 (裳華房)

Hattori, K. and Itakura, K.. 2013. Ann. Phys. **330**.23. arXiv:1209.2663v1.

Schwinger, J.. 1951. Phys. Rev. **82**. 664

Melrose, D. B. and Parle, A. J.. 1983. Aust. J. Phys. **36**. 755