

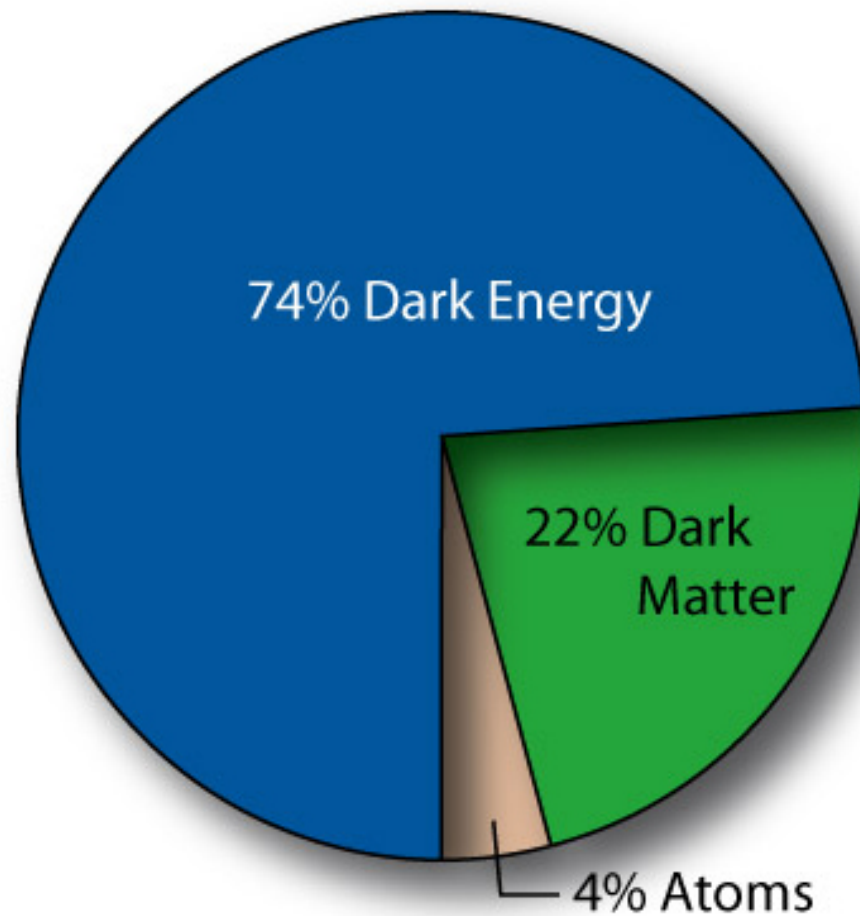
ブラックホール宇宙

中尾憲一(大阪市大)

共同研究者: 柳哲文(YITP), 孝森洋介, 阿部博之(大阪市大)

イントロダクション

我々の宇宙に存在するものの質量比



光をほとんど発しないし
反射も吸収もしない
謎の存在

WIMP, Black hole,...

$M \geq 10^{15} \text{g}$ なら蒸発せずに残る

速度分散が小さく ($\langle v^2 \rangle \ll c^2$)
平均間隔の長い ($l \gg Gm/c^2$)
多体ブラックホール系

≈ ダスト ?

ブラックホールの多体系からなる宇宙を調べよう

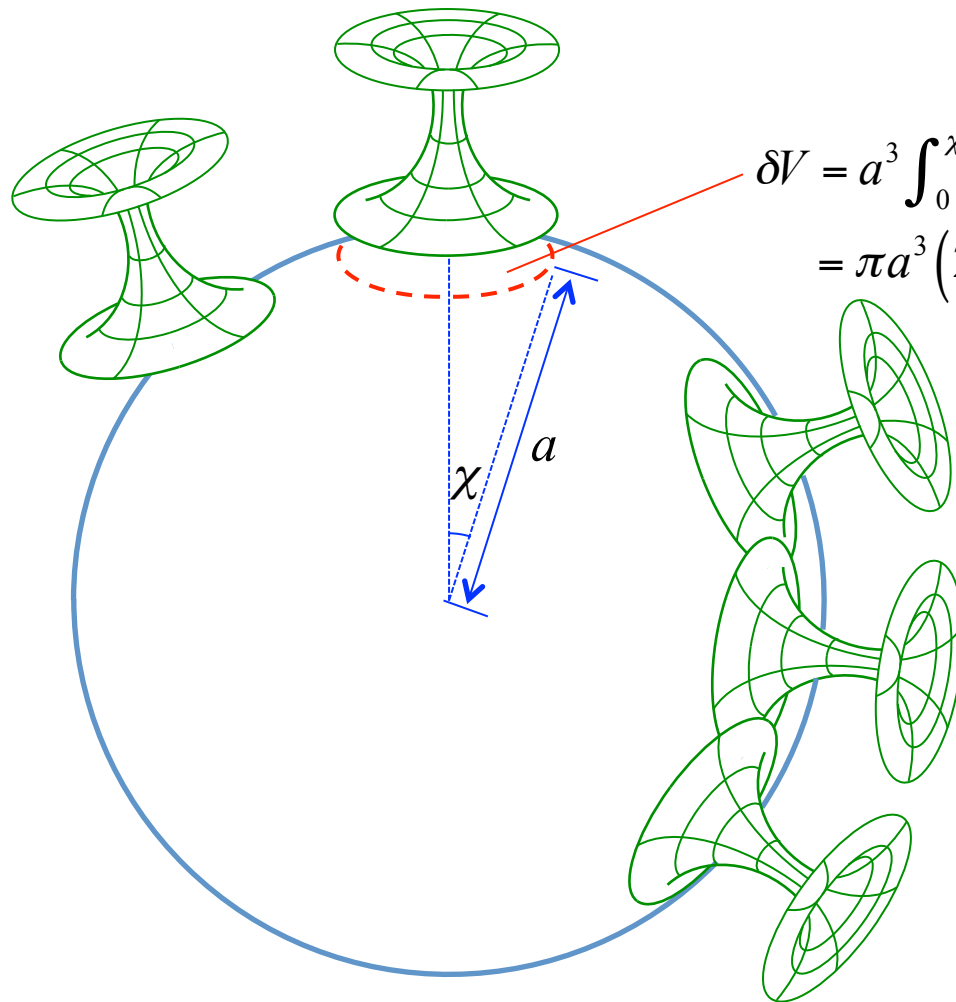
Lindquist & Wheeler (1957)

“Dynamics of a Lattice Universe by the Schwarzschild-Cell Method”

N 個の Schwarzschild slot を3次元球面に貼付ける

$$dl^2 = a^2 \left[d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]$$

体積 $V = 2\pi a^3$



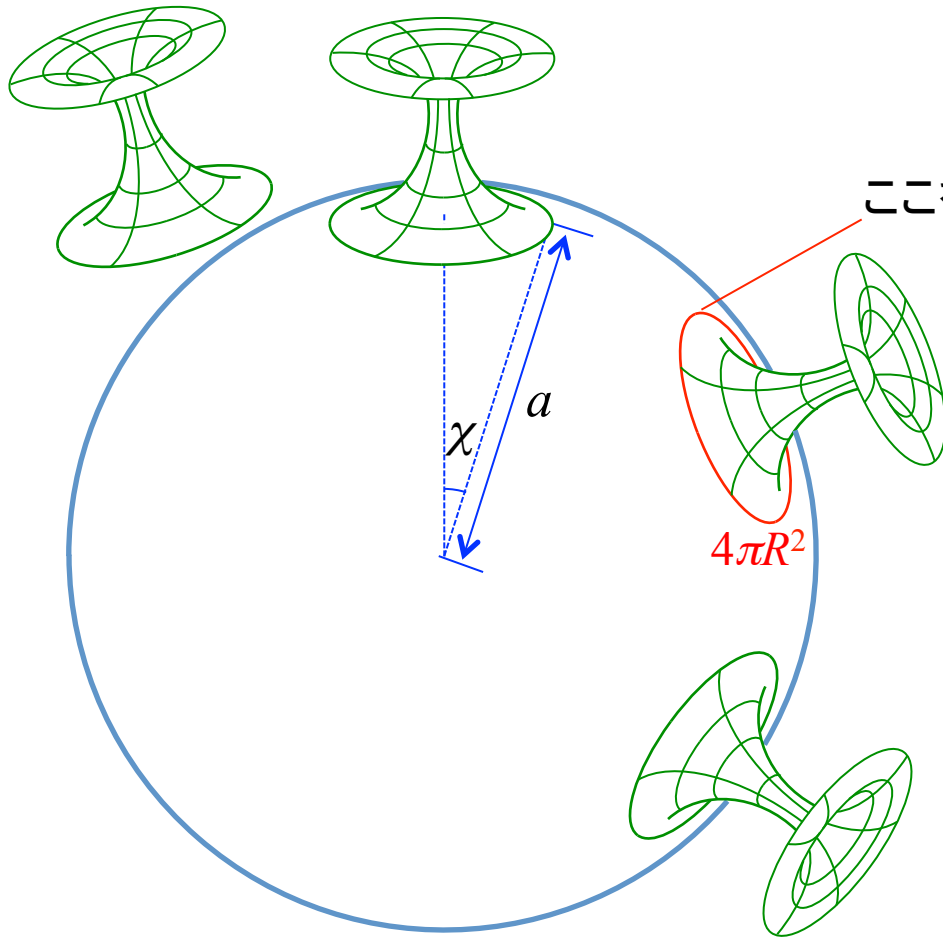
$$\begin{aligned} \delta V &= a^3 \int_0^\chi \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^2 \chi \sin \theta d\theta d\varphi d\chi \\ &= \pi a^3 (2\chi - \sin 2\chi) \end{aligned}$$

χ を決める方程式

$$N = \frac{V}{\delta V} \longrightarrow 2\chi - \sin 2\chi = \frac{2\pi}{N}$$

この決め方だと
Schwarzschild-cell は重なる

でも、良しとする



M = Total Mass

$m = \frac{M}{N}$: Schwarzschild-cell 1個の mass

ここを滑らかに接続 $\rightarrow \left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2 = \frac{2m}{R} - \sin^2 \chi$
Bound timelike geodesic

Maximum radius

$R_{MAX} = \frac{2m}{\sin^2 \chi} \rightarrow a_{MAX} = \frac{R_{MAX}}{\sin \chi} = \frac{2m}{\sin^3 \chi}$

χ を決める方程式

$2\chi - \sin 2\chi = \frac{1}{N} \rightarrow \chi \xrightarrow{N \gg 1} \left(\frac{3\pi}{2N}\right)^{\frac{1}{3}}$

$\therefore a_{MAX} \xrightarrow{N \gg 1} \frac{4M}{3\pi}$

Matter dominant の Closed FRW universe の最大半径を再現

うまくいっている....、本当？

○ 3次元球面

$$\frac{1}{2\pi} \frac{d(\text{circumference})}{d(\text{radial distance})} = \frac{d\sin\chi}{d\chi} = \cos\chi$$

○ Schwarzschild-cell

接続面 unit tangent $u^\mu = \left(\frac{dT}{d\tau}, \frac{dR}{d\tau}, 0, 0 \right)$

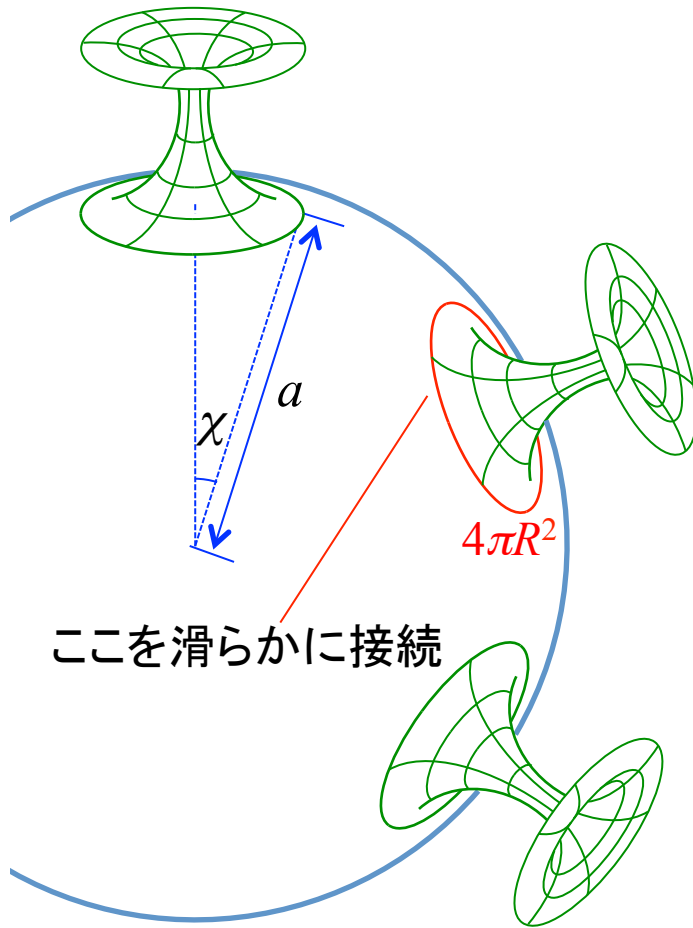
接続面 unit normal $n_\mu = \left(-\frac{dR}{d\tau}, \frac{dT}{d\tau}, 0, 0 \right)$

$$\frac{1}{2\pi} \frac{d(\text{circumference})}{d(\text{radial distance})} = n^\mu \partial_\mu R = \left(1 - \frac{2m}{R} \right) \frac{dT}{d\tau}$$

→ $\left(1 - \frac{2m}{R} \right) \frac{dT}{d\tau} = \cos\chi$

→ $\left(\frac{dR}{d\tau} \right)^2 = \frac{2m}{R} - \sin^2\chi$

規格化条件



ここを滑らかに接続

$4\pi R^2$

Dynamical evolution of inhomogeneous universe

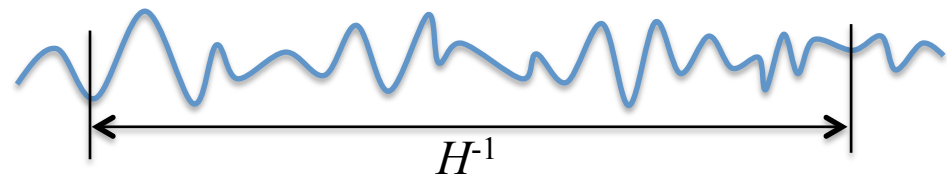
二間瀬(1988)

“Approximation scheme for constructing clumpy universe in general relativity”

Cosmological post-Newtonian formulation

$$g_{\mu\nu} = a^2 (\bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})$$

- ・典型的な速度 $v \ll c$
- ・ $|h_{\mu\nu}| \ll 1$
- ・非一様性のスケール $\ll H^{-1} := (a'/a^2)^{-1}$



平均化による非線形効果の取り込み $\langle f \rangle = \frac{1}{V} \iiint f(\mathbf{r}) d^3 r$

$$\left(\frac{a'}{a^2}\right)^2 = \frac{8\pi}{3} \left[\bar{\rho} + \langle \rho v^2 \rangle + \frac{5}{8\pi} \langle (\nabla\phi) \cdot \nabla\phi \rangle \right] \quad \phi = -h_{00}: \text{ニュートンポテンシャル}$$

非一様性(自己重力)の効果

ゲージ依存性に注意

Russ, Soffel, Kasai, Borner (1997)
Ishibashi, Wald(2005)

自己重力の無視できない物体で満たされた
宇宙の力学的進化は非自明

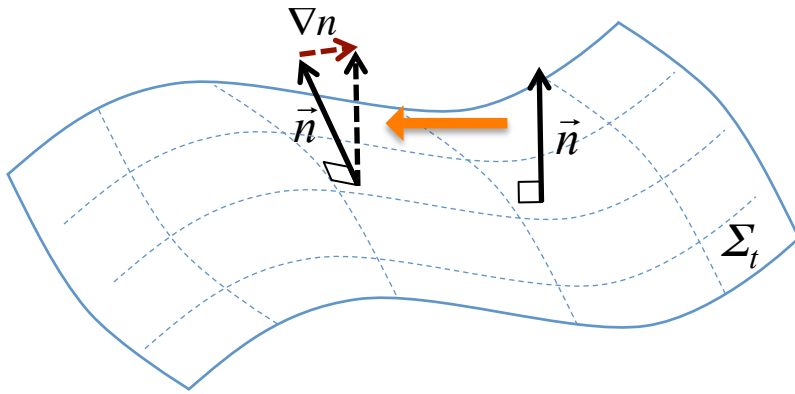
摂動計算できないほどの非線形効果は非自明

e.g. ダスト宇宙でも加速膨張できる.
Kai, Kozaki, KN, Nambu, Yoo (2006)

Black Hole Universe を数値相対論で調べよう

一般相対論の初期値問題

3次元空間の時間発展



◎ (3+1)-分解

Time function t : $t = \text{一定}$ が空間的超曲面 Σ_t

Σ_t の垂直単位ベクトル $n_a = -\alpha \nabla_a t$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{-(\nabla^a t) \nabla_a t}} \quad : \text{lapse function}$$

空間的超曲面の重要な幾何学量

◎ Intrinsic metric $h_{ab} = g_{ab} + n_a n_b$: 3次元空間の幾何学

◎ Extrinsic curvature $K_{ab} = -\left(\delta_a^c + n_a n^c\right) \nabla_c n_b = -\frac{1}{2} \partial_{\vec{n}} h_{ab}$: Σ_t の埋め込み方

$\partial_{\vec{n}}$: \vec{n} 方向のLie微分 \approx 時間微分

Einstein equations

Hamiltonian constraint $(G_{ab} - 8\pi GT_{ab})n^a n^b = 0$

$${}^3R - K_a^b K_b^a + K^2 = 16\pi T_{ab} n^a n^b$$

Momentum constraint $(G_{cd} - 8\pi T_{cd})n^c h_a^d = 0$

$$D_b (K_a^b - h_a^b \text{tr}K) = -8\pi T_{cd} n^c h_a^d$$

時間に関する
1階微分まで

初期条件に対する条件

Evolution equations $\left[R_{cd} - 8\pi \left(T_{cd} - \frac{1}{2} g_{cd} T_e^e \right) \right] h_a^c h_b^d = 0$

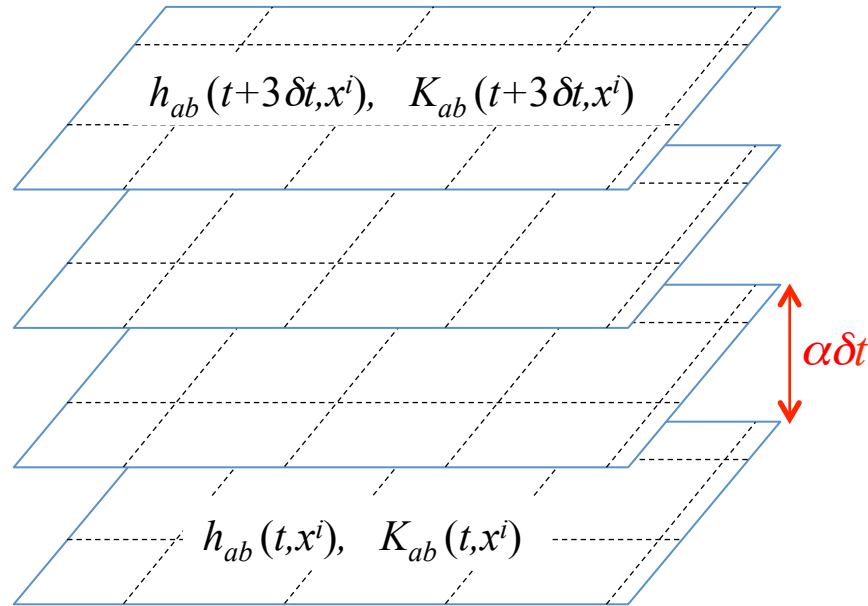
$$\partial_{\bar{n}} h_{ab} = -2K_{ab}$$

$$\partial_{\bar{n}} K_{ab} = {}^3R_{ab} + \text{tr}K K_{ab} - 2K_a^c K_{cb} - 8\pi \left(T_{cd} - \frac{1}{2} g_{cd} \text{tr}T \right) h_a^c h_b^d$$



時間に関する2階微分

積分の手順



Evolution eqs. を解いて時空を構築

$$\begin{aligned}\partial_{\bar{n}} h_{ab} &= -2K_{ab} \\ \partial_{\bar{n}} K_{ab} &= {}^3R_{ab} + \text{tr}K K_{ab} - 2K_a^c K_{cb} \\ &\quad - 8\pi \left(T_{cd} - \frac{1}{2} g_{cd} \text{tr}T \right) h_a^c h_b^d\end{aligned}$$

Constraint eqs. を解いて初期条件を設定

$$\begin{aligned}{}^3R - K_a^b K_b^a + \text{tr}K^2 &= 16\pi T_{ab} n^a n^b \\ D_b \left(K_a^b - h_a^b \text{tr}K \right) &= -8\pi T_{cd} n^c h_a^d\end{aligned}$$

初期条件の設定

初期値 $h_{ab}(t, x^i), K_{ab}(t, x^i)$ $6 \times 2 = 12$ 成分

Hamiltonian constraint

$${}^3R - K_b^a K_a^b + \text{tr}K^2 = 16\pi T_{ab} n^a n^b \quad 1 \text{成分}$$

Momentum constraint

$$D_b \left(K_a^b - h_a^b \text{tr}K \right) = -8\pi T_{bc} n^b h_a^c \quad 3 \text{成分}$$

4成分に制限

$12 - 4 = 8$ 成分が自由に与えられる

座標の自由度 = 4 物理的自由度 = 4

Einstein-Rosen bridge

真空 $T_{ab} = 0$

Intrinsic metric $\gamma_{ij} = \psi^4 f_{ij}$ f_{ij} : 平坦な空間の計量

Extrinsic curvature $K_{ij} = 0$: time symmetric condition

漸近平坦

} 仮定

Hamiltonian constraint $\Delta\psi = 0$ Δ : 平坦な空間のラプラス演算子

Einstein-Rosen bridges:
$$\psi(\mathbf{r}) = 1 + \sum_{A=1}^N \frac{m_A}{2|\mathbf{r} - \mathbf{r}_A|}$$

m_A : A th bridge の質量パラメター

\mathbf{r}_A : A th bridge の位置ベクトル

Momentum constraint: 自明

$$\text{2-bridge case } \psi = 1 + \frac{m_1}{2|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{m_2}{2|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|}$$

$$dl^2 \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{2r} \left(m_1 + m_2 \right) \right]^4 \left(dr^2 + r^2 d\Omega^2 \right)$$

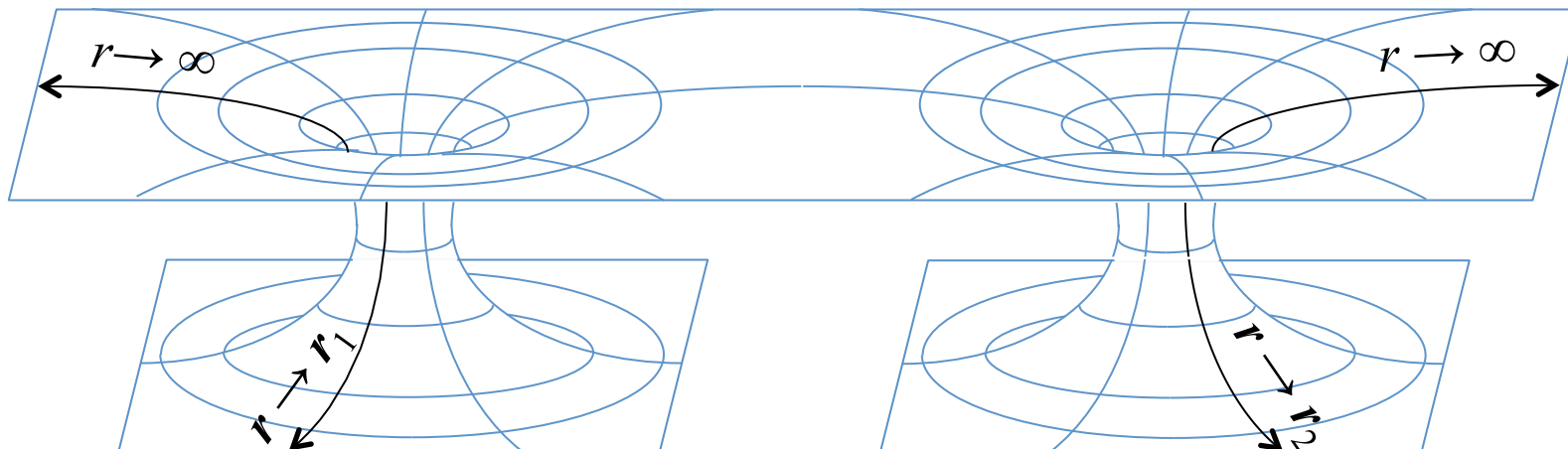
全質量

$$\xrightarrow{r \rightarrow r_1} \left[1 + \frac{1}{2R_1} \left(m_1 + \frac{m_1 m_2}{2|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right) \right]^4 \left(dR_1^2 + R_1^2 d\Omega_1^2 \right) \quad \text{where } R_1 = \frac{m_1^2}{4|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} .$$

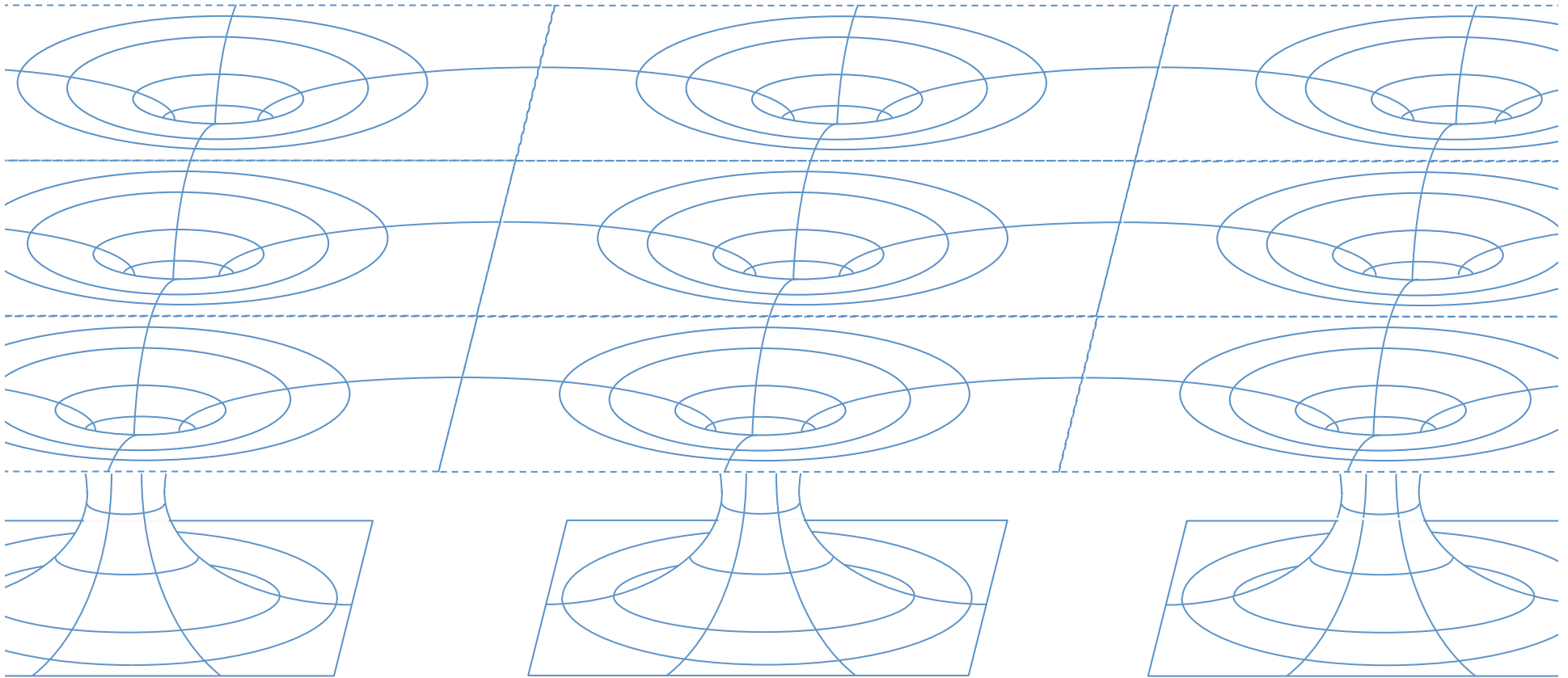
Bridge 1 の質量

$$\xrightarrow{r \rightarrow r_2} \left[1 + \frac{1}{2R_2} \left(m_2 + \frac{m_2 m_1}{2|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \right) \right]^4 \left(dR_2^2 + R_2^2 d\Omega_2^2 \right) \quad \text{where } R_2 = \frac{m_2^2}{4|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} .$$

Bridge 2 の質量



周期的にブラックホールが並ぶ宇宙



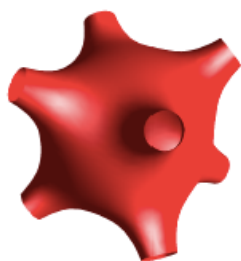
$$\text{ER solution: } \psi(\mathbf{r}) = 1 + \sum_{A=1}^N \frac{m_A}{2|\mathbf{r} - \mathbf{r}_A|} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty$$

単純に周期的にER bridgeを並べるだけじゃダメ

最近の進展(1)

T. Clifton, K. Rosquist and R. Tavakol, arXiv:1203.6478,
 “An exact quantification of backreaction in relativistic cosmology”

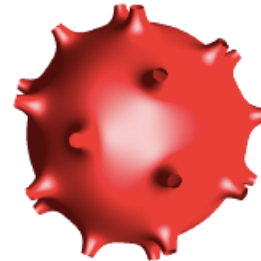
閉じたブラックホール宇宙の解析的な初期条件
 Periodic & Moment of Maximum Expansion



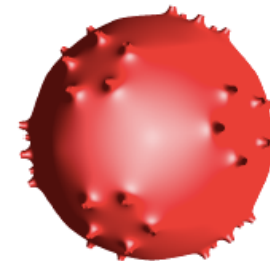
(c) A slice through the 16-cell solution



(d) A slice through the 24-cell solution



(e) A slice through the 120-cell solution



(f) A slice through the 600-cell solution

Cell Shape	Number of Masses	$\left(\frac{a_0^{\text{discrete}}}{a_0^{\text{FLRW}}}\right)_{D1}$	$\left(\frac{a_0^{\text{discrete}}}{a_0^{\text{FLRW}}}\right)_{D2}$
Tetrahedron	5	1.321	1.360
Cube	8	1.258	1.291
Tetrahedron	16	1.061	1.097
Octahedron	24	1.083	1.099
Dodecahedron	120	1.033	1.034
Tetrahedron	600	0.996	1.002

個数を増やすとダストで満たされた一様等方宇宙の最大膨張時の“半径”に漸近

最近の進展(2)

E. Bentivegna, M. Korzynski, arXiv:1204.3568,
“Evolution of a periodic eight-black-hole lattice in numerical relativity”

閉じたブラックホール宇宙の時間発展
8個のBH, Periodic, Contracting from Maximum Expansion,

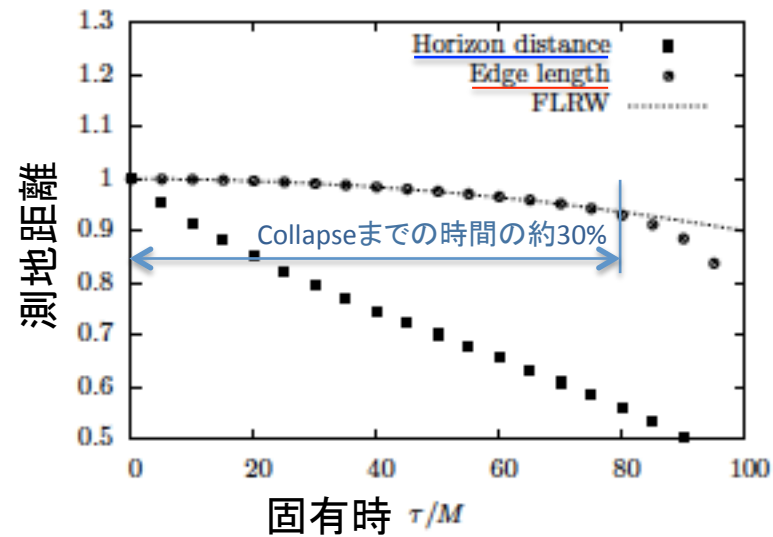
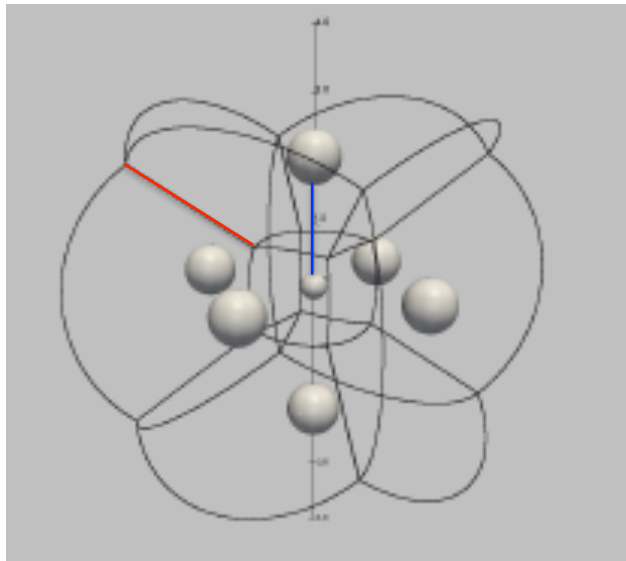
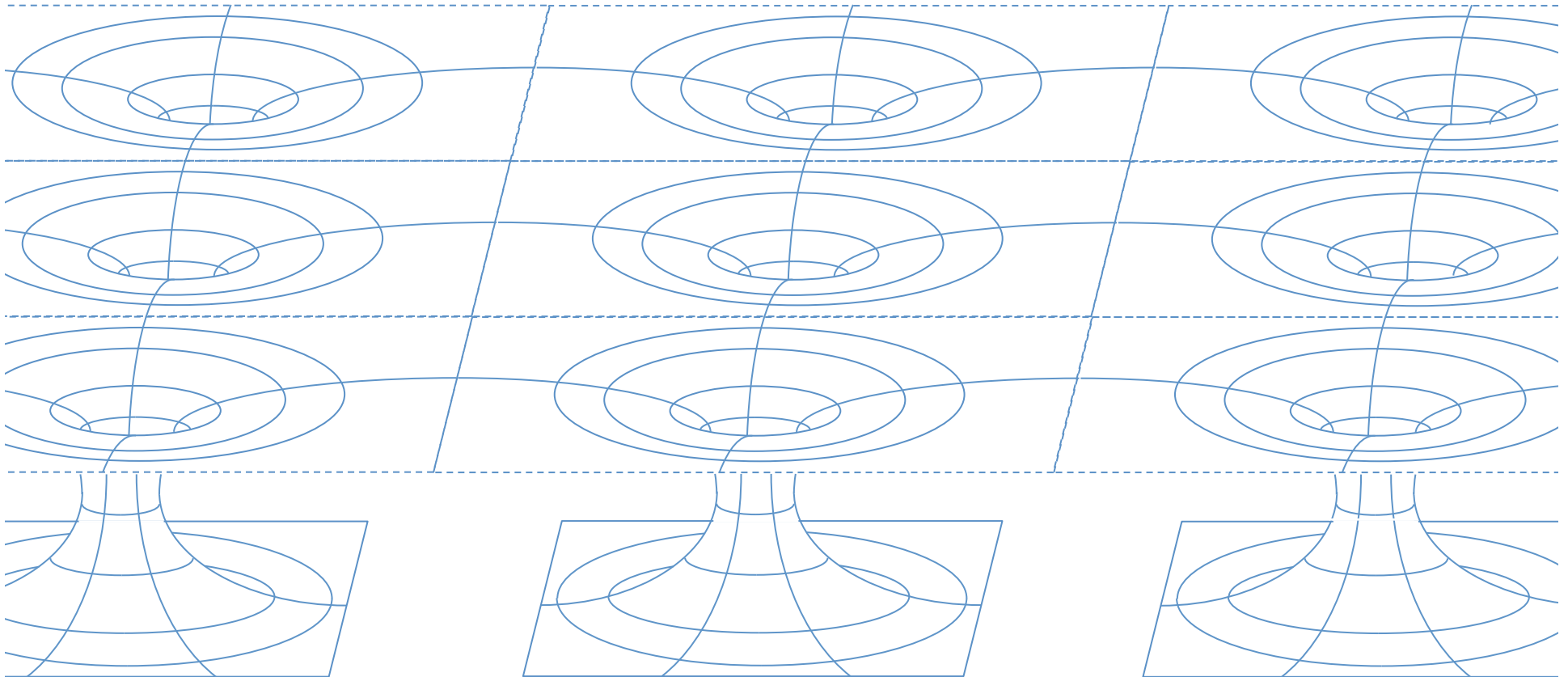


Figure 7. Several measures of scaling in the eight-black-hole universe, as functions of proper time τ , plotted against a possible identification of the corresponding FLRW model (see section 4 for details). All the quantities have been renormalized to their respective values at $\tau = 0$.

最近の進展(3)

C-M. Yoo, H. Abe, Y. Takamori, KN, arXiv:1204.2411,
“Black Hole Universe ; Construction and Analysis of Initial Data”

T^3 -Periodic, Expanding; Einstein-de Sitter model に対応



仮定

真空 $T_{ab} = 0$

Intrinsic metric $\gamma_{ij} = \psi^4 f_{ij}$ f_{ij} : flat metric

$$\psi \xrightarrow{r \rightarrow 0} 1 + \frac{M}{2r} \quad : r = 0 \subset \text{BH}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

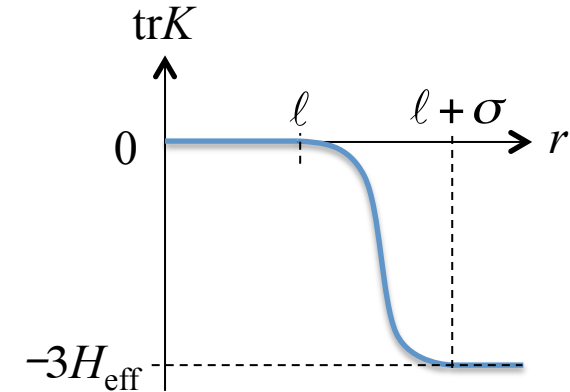
Extrinsic curvature $K_{ij} =: A_{ij} + \frac{1}{3} \gamma_{ij} \text{tr}K$

$$\odot \text{tr}K = -3H_{\text{eff}} W(r)$$

$$W(r) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 \leq r < \ell \\ \sigma^{-4} [(r - \ell - \sigma)^2 - \sigma^2]^2 & \text{for } \ell \leq r < \ell + \sigma \\ 1 & \text{for } \ell + \sigma \leq r \end{cases}$$

$$\odot A^{ij} = 2\psi^{10} \left(\partial^{(i} X^{j)} - \frac{1}{3} f^{ij} \partial_k X^k \right) =: \psi^{10} (LX)^{ij}$$

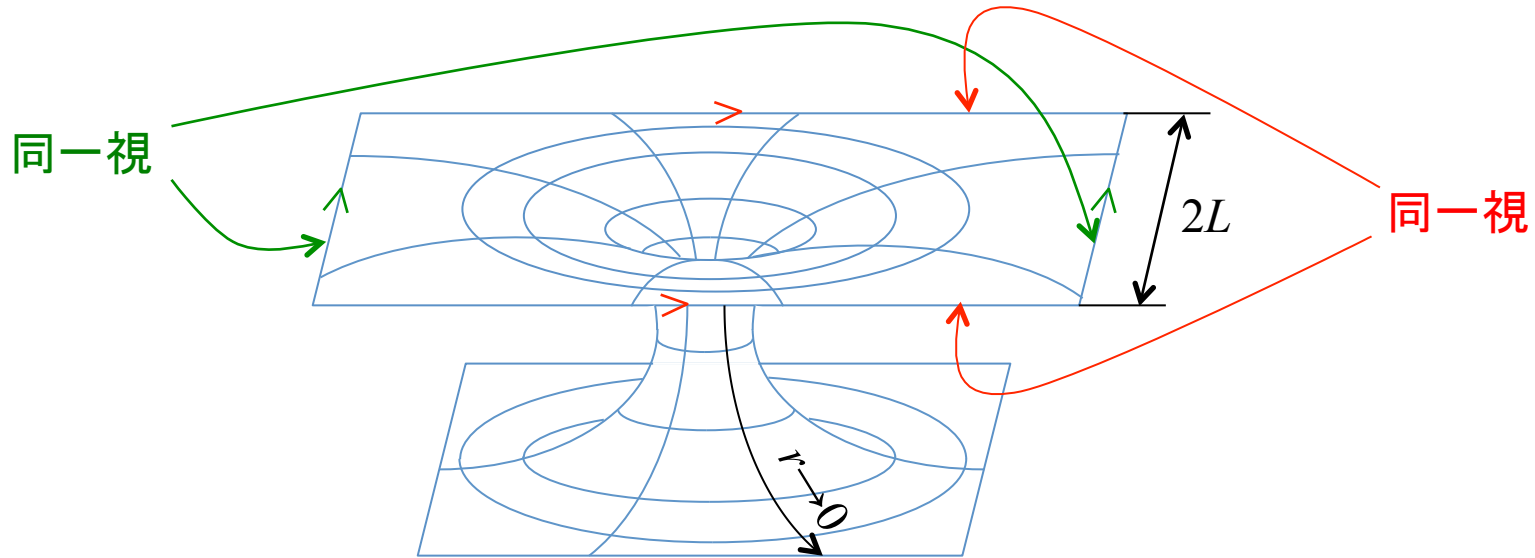
T³周期的境界条件 $-L \leq x \leq +L, -L \leq y \leq +L, -L \leq z \leq +L$



注意) 一様等方宇宙の
Hubble parameter

$$H = -\frac{\text{tr}K}{3}$$

Hamiltonian constraint
$$\Delta\psi + \frac{1}{8} f_{ik} f_{jm} (LX)^{ij} (LX)^{km} \psi^{-7} - \frac{1}{12} \text{tr}K \psi^5 = 0$$



1区画で Hamiltonian constraint を体積積分

$$\psi \xrightarrow{r \rightarrow 0} 1 + \frac{M}{2r} \quad \longrightarrow \quad \int_{-L}^{+L} \Delta\psi d^3r = \lim_{r \rightarrow 0} \oint \left(-\frac{\partial\psi}{\partial r} \right) r^2 d\Omega = 2\pi M$$

M : ブラックホールの質量

$$\int_{-L}^{+L} \text{tr}K \psi^5 d^3r = -3H_{\text{eff}} \int_{-L}^{+L} W(r) \psi^5 d^3r = -3H_{\text{eff}} V$$

$V \equiv \int_{-L}^{+L} W(r) \psi^5 d^3r$: 膨張している領域の体積

Hamiltonian constraint $\Delta\psi + \frac{1}{8} f_{ik} f_{jm} (LX)^{ij} (LX)^{km} \psi^{-7} - \frac{1}{12} \text{tr}K \psi^5 = 0$ の体積積分

→ Effective Hubble Equation $H_{\text{eff}}^2 = \frac{8\pi}{3} (\rho_{\text{BH}} + \rho_{\text{K}})$

$\rho_{\text{BH}} = \frac{M}{V}$: ブラックホールの質量密度

$\rho_{\text{K}} = \frac{1}{16\pi V} \int_{-L}^{+L} f_{ik} f_{jm} (LX)^{ij} (LX)^{km} \psi^{-7} d^3r$: 空間の歪みの“運動エネルギー密度”

ここで、

M : ブラックホールの質量

$V \equiv \int_{-L}^{+L} W(r) \psi^5 d^3r$: 膨張している領域の“体積”

Momentum constraint $\Delta X^i - \frac{2}{3} \psi^6 \partial^i \text{tr}K = 0$

$$X^i = Y^i + \partial^i Y \quad \text{with} \quad \partial_i Y^i = 0$$

Divergenceをとる


$$\Delta Z = \frac{1}{2} \partial_i (\psi^6 \partial^i \text{tr}K)$$

$$\Delta Y = Z$$

$$\Delta Y^i = -\frac{4}{3} \partial^i Z + \frac{2}{3} \psi^6 \partial^i \text{tr}K$$

Hamiltonian constraint

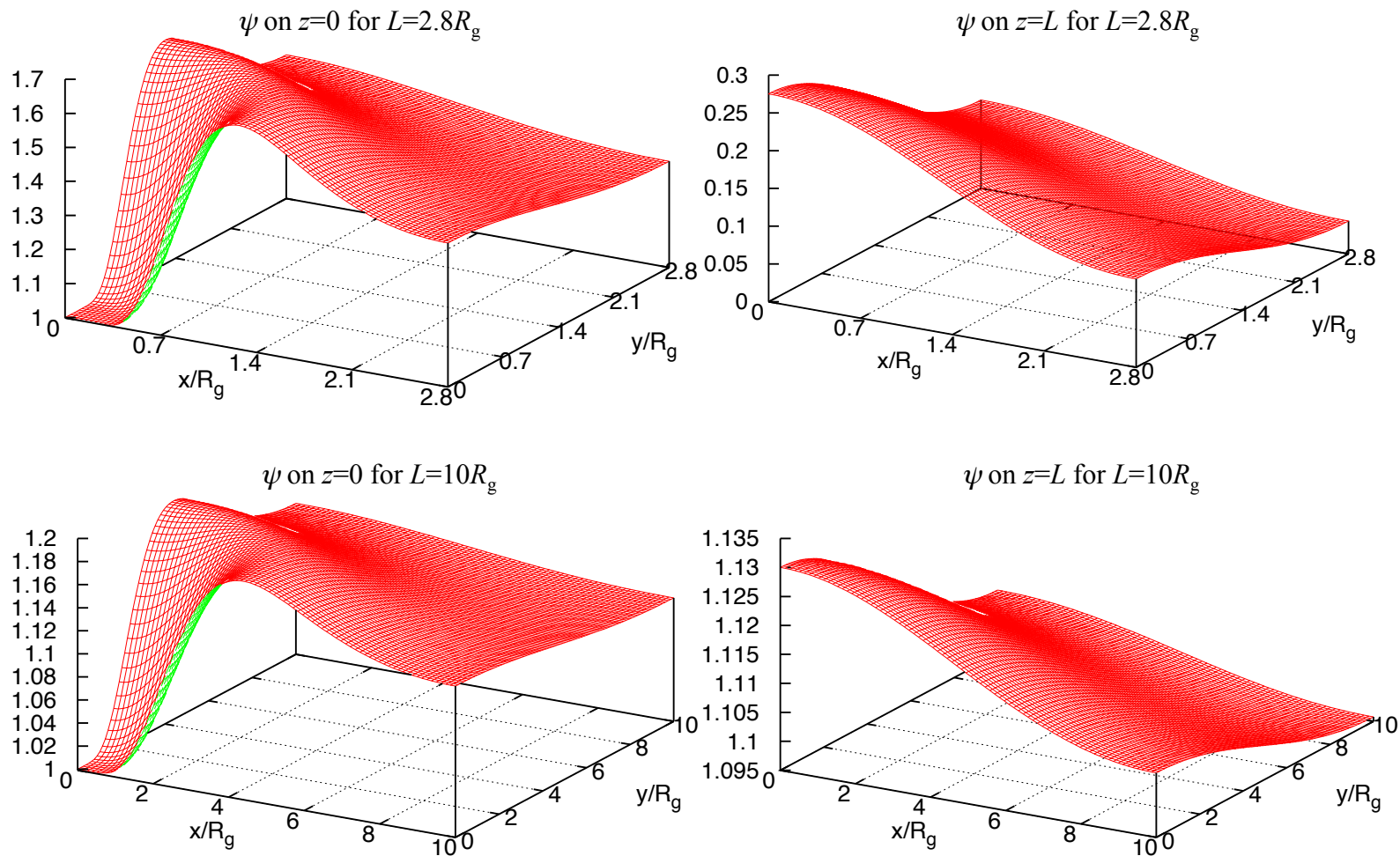
$$\Delta \psi = -\frac{1}{8} f_{ik} f_{jm} (LX)^{ij} (LX)^{km} \psi^{-7} + \frac{1}{12} \text{tr}K \psi^5$$

この順に解く

実際は、 $\Psi = \psi - \frac{M}{2r}$ について解く (境界条件が簡単なので).

A numerical result

$$\psi \equiv \Psi - \frac{M}{2r} \quad \text{:ER bridgeの寄与を引き去った conformal factor}$$

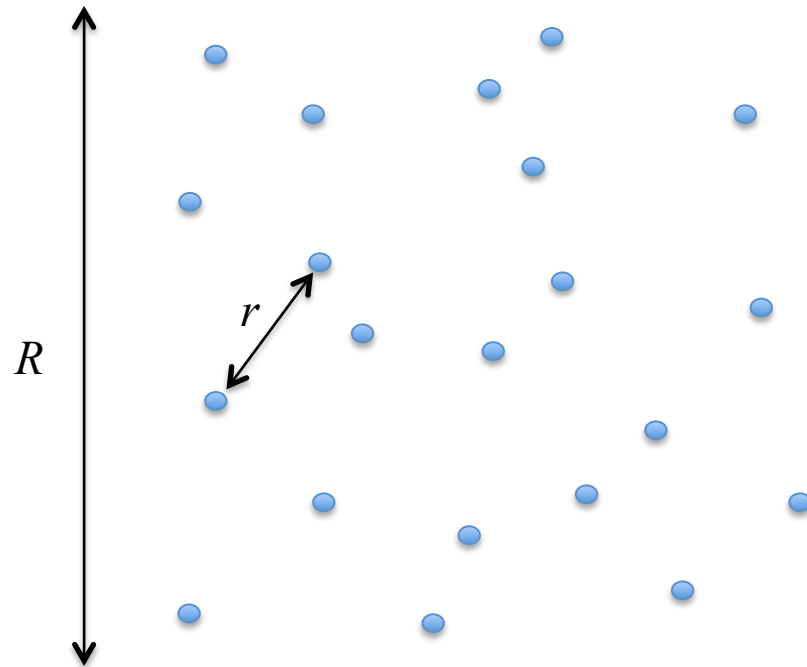


$$R_g = \frac{M}{2} \quad \text{:座標重力半径}$$

N-body systemとの比較

N-body simulation

逆2乗則の重力相互作用する多粒子系の進化を追う



全質量 = M

系のサイズ = R

粒子数 = N

粒子の質量 $m = M/N$

2粒子間の距離 $r = R/N^{1/3}$

$$\text{2粒子間の重力} = \frac{Gm^2}{r^2} = G \left(\frac{M}{N} \right)^2 \left(\frac{N^{1/3}}{R} \right)^2 = \frac{GM^2}{R^2} \times N^{-2/3} \xrightarrow[N, R \text{ を固定}]{N \rightarrow \infty} 0$$

粒子数が十分多ければ、無衝突粒子系(ダークマター)の良い近似

宇宙論的ニュートン近似

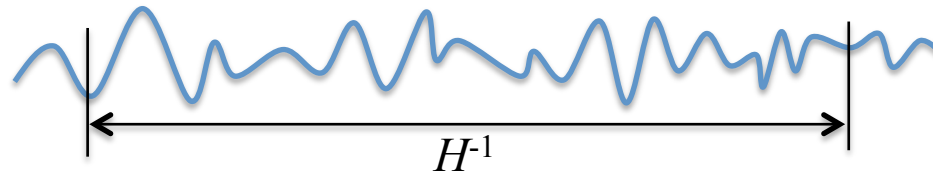
Cosmological N-body simulation の基礎

- ・弱い重力 (Metric = 線形近似)

$$g_{00} = -(1 + 2\Phi)a^2(\eta) + O(v^4), \quad g_{0i} = O(v^3), \quad g_{ij} = (1 - 2\Phi)a^2(\eta)\delta_{ij}$$

Φ はニュートンの重力ポテンシャル. $|\Phi| \ll 1$

- ・物質の運動 = 遅い ($v \ll 1$)
- ・非一様性のスケール \ll ホライズン半径



物質分布 = 非線形でもOK

銀河や銀河団のような構造の形成を解析できる!

背景時空 = ここでは、Einstein-de Sitter model (平坦な一様等方宇宙 filled with ダスト)

先のBH宇宙と同じく、1辺の長さが $2L$ の立方体領域に、周期境界条件を課す。


$$M = \int_{-L}^{+L} \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \quad \rho(\mathbf{r}): \text{質量密度}$$

$$H_N^2 = \frac{8\pi}{3} \rho_B = \frac{8\pi}{3} \frac{M}{(2L)^3} \quad : \text{ハッブルパラメーター (背景時空と同じ膨張率)}$$

$$g_{00} = -(1 + 2\Phi)a^2(\eta) + O(v^4), \quad g_{0i} = O(v^3), \quad g_{ij} = (1 - 2\Phi)a^2(\eta)\delta_{ij} \quad : \text{metric}$$

$$\text{注意) } \Psi^4 = a^2(1 - 2\Phi)$$

$a=1$ として

Hamiltonian constraint  $\Delta\Phi = 4\pi \left[\rho(\mathbf{r}) - \frac{M}{8L^3} \right] \quad : \text{ポアッソン方程式}$

Cosmological N -body simulation

$$\Delta\Phi = 4\pi \left[\rho(\mathbf{r}) - \frac{M}{8L^3} \right]$$

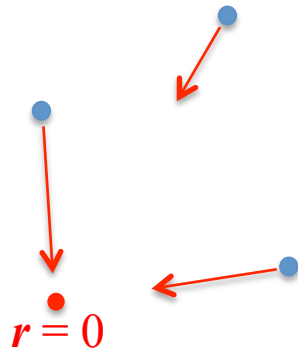
$\rho(\mathbf{r}) \gg \frac{M}{8L^3}$ でもOKだが、 $|\Phi| = O(v^2) \ll 1$ でなければならない。

質点近似: $\rho(\mathbf{r}) \rightarrow M\delta^3(\mathbf{r})$ in N -body simulation

→ $r=0$ で Φ が無限大に 質点はBH? でも、ニュートン近似は破綻!

→ こうしても、 $r=0$ の質点が $r \neq 0$ の質点に及ぼす重力は、計算できる!

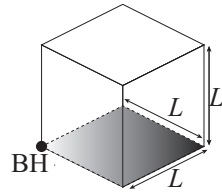
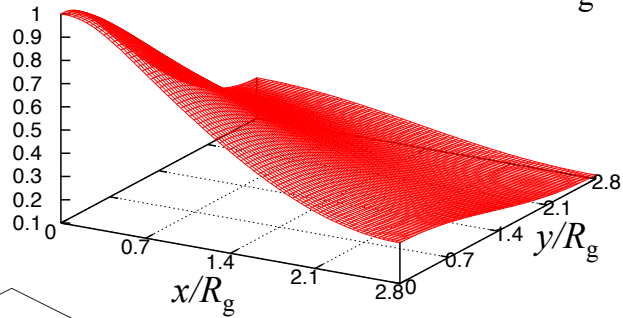
質点近似は、計算を簡単にする為の置き換えにすぎない!



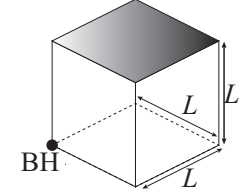
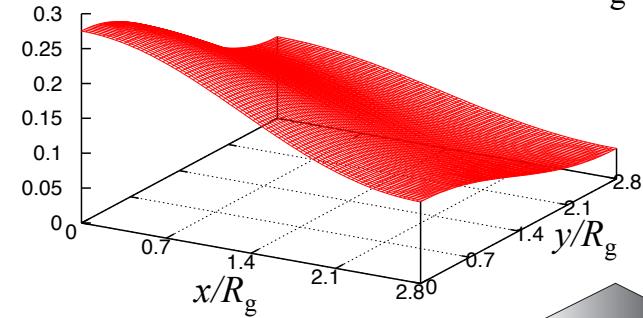
↓
“質点=ブラックホール”と見なすことができるかどうかは、非自明である。

$$\text{Diff} = \left| \frac{\Psi^4 - (1 - 2\Phi)}{\Psi^4} \right| \quad : \text{BH宇宙の計量と}N\text{-body宇宙の計量の差}$$

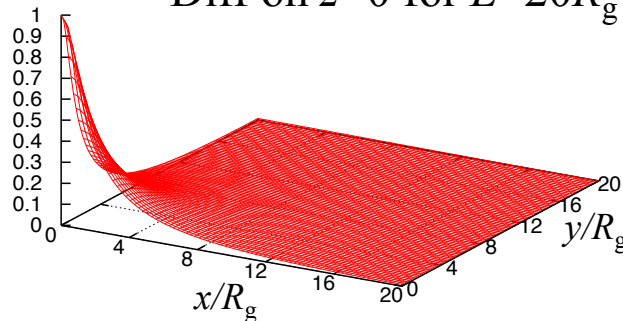
Diff on $z=0$ for $L=2.8R_g$



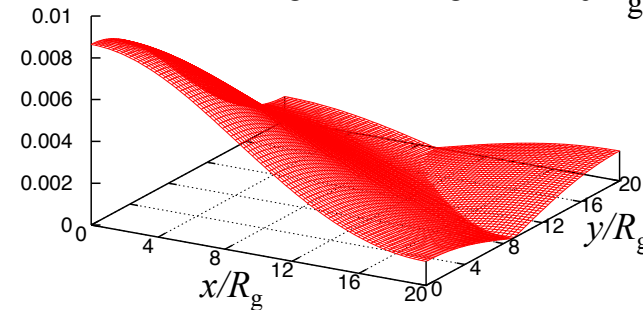
Diff on $z=L$ for $L=2.8R_g$



Diff on $z=0$ for $L=20R_g$



Diff on $z=L$ for $L=20R_g$



$$R_g = \frac{M}{2} \quad : \text{座標重力半径}$$

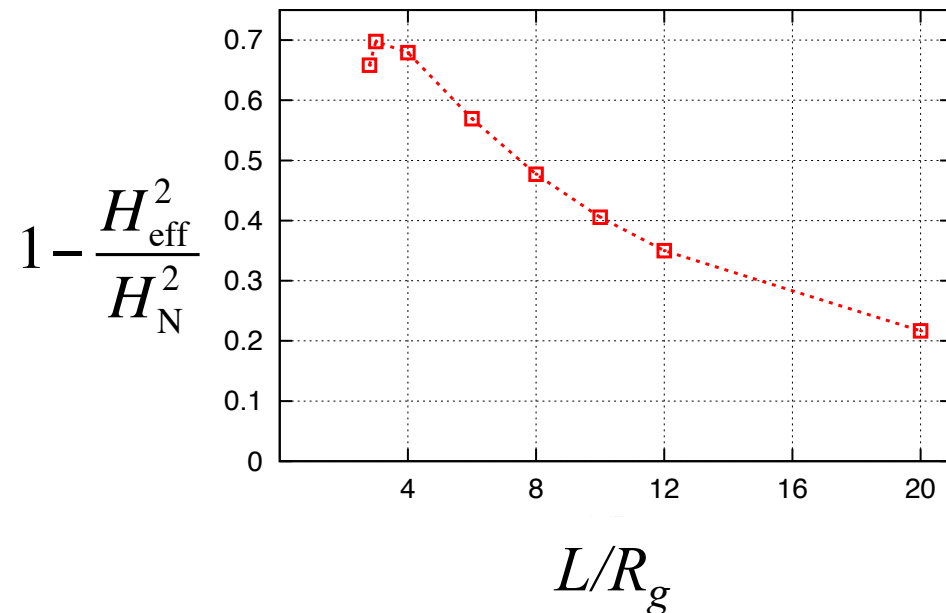
$L=20R_g$ の場合

境界付近では、 $\text{Diff} \approx 0$. \longrightarrow 境界付近では、3次元空間の計量は、両者ほぼ同じ。

BACKREACTION

自己重力を持つ非一様性が、背景宇宙の膨張速度を変える効果

BH宇宙のハッブル・パラメーターと N -body 宇宙のハッブルパラメーターの違い



$L=2.8R_g$ のとき $H_{\text{eff}} \approx 0.55H_N$

大きな backreaction.

$L \gg R_g$ のとき $H_{\text{eff}} \approx H_N$

この場合、BH宇宙は
N-body simulation で記述できそう.

ホライズン半径 H_{eff}^{-1} の球領域に存在するBHの数 N_{BH}

$$N_{\text{BH}} \approx \frac{1}{M} \times \frac{4\pi}{3} H_{\text{eff}}^{-3} \rho_{\text{BH}} \approx \frac{1}{4} \left(\frac{3L^3}{2\pi R_g^3} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$L \rightarrow \infty$ の極限で N_{BH} は無限大

この極限で、おそらく一様等方宇宙と一致

Future works

- 時間発展を調べる; 膨張則、距離-赤方偏移関係.....

数値相対論を使わない解析も重要; 新しい近似法の開発

