# 確率微分方程式を用いた宇宙線粒子加速シミュレーション・コードの開発

青山学院大学 修士2年　中島 良介

Abstract

我々の天の川銀河内の天体で加速される宇宙線粒子のエネルギーは10の15.5 乗eVまで到達すると考えられている。その加速機構の最有力候補がdiffusive shock accelerationであり、被加速粒子の分布関数は移流拡散方程式に よって記述される。しかし、定常状態などの特別な場合を除き解析的に解くのは難しく、数値計算が必須となる。そこで私は超新星残骸周辺の衝撃波により加速された粒子の分布関数を計算する数値計算法を開発している。具体的には高エネルギー粒子の分布関数の満たす移流拡散方程式を解くことが目標だが、これを解析的に解くことは困難である。そこで、確率微分方程式を用いた計算法の開発を試みた。当初、この方法では衝撃波面で流体速度場が不連続になるということから発散項が出てきてしまうために、観測結果を再現することができなかった。しかし、これはM. Zhang (2000)の手法によって解決された。今回の発表では、M. Zhang (2000)によって変形された確率微分方程式を用いて数値計算を行い、高エネルギー粒子のエネルギースペクトルのテスト計算を行った。また、数値計算による統計精度を上げるため、particle splittingという粒子の統計的重みを考え粒子を分割していく手法も用いた。

## 研究の目的

〇数値計算を用いて、エネルギースペクトルの最高エネルギー帯域でのカットオフの形を精査する
〇電子のシンクロトロン放射は観測されているが、陽子の場合はどのようになるのか考察する

## SNRによってどのエネルギーまで加速されるか

**SNRで加速できる最高エネルギー**

$E_{max} \sim e\,B\,R \sim 10^{15}\,\mathrm{eV}\ \ B_{\mu G} R_{pc}$

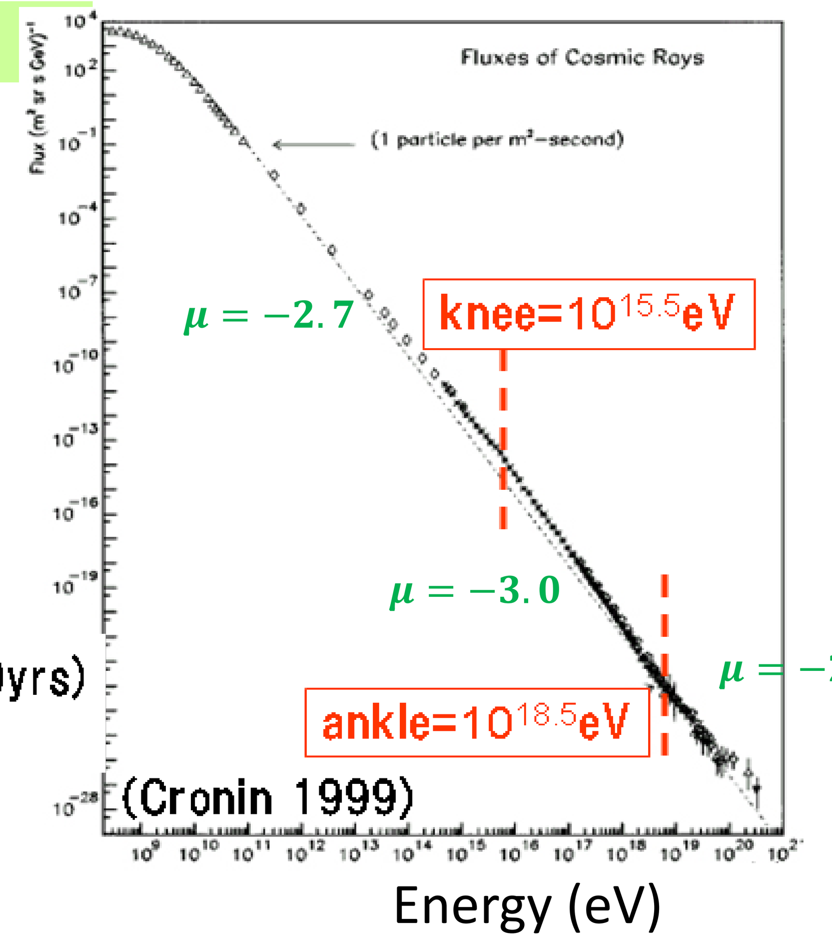
**どのくらい作る必要あるか？**

$\dfrac{1\ \mathrm{eV\ cc^{-1}} \times 10^{66}\mathrm{cc}}{10^{7}\mathrm{yrs}} \sim 10^{40}\ \mathrm{erg\ s^{-1}}$

銀河の体積　拡散 timescale　CR luminosity

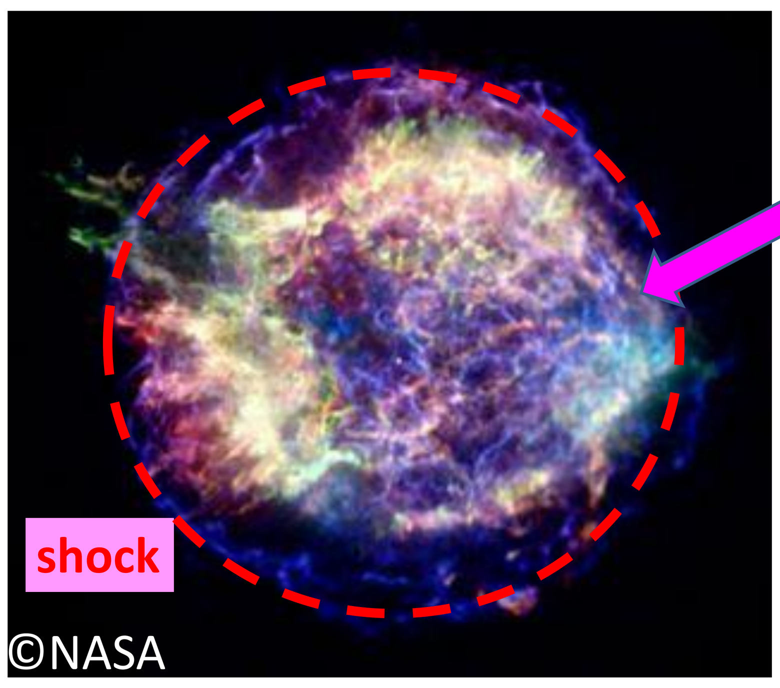
**これは超新星残骸(SNR)でまかなえる。**

$10^{51}$erg×(変換効率～1%)×(SN rate～1/30yrs)
～ $10^{40}$ erg $s^{-1}$



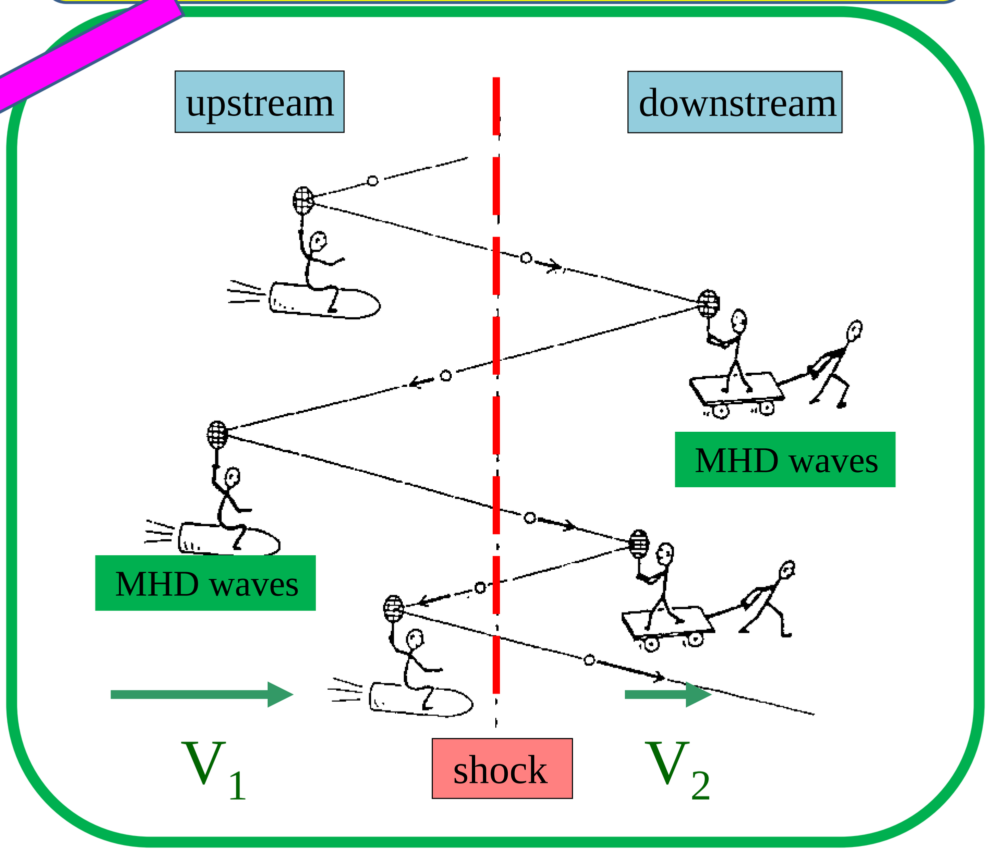

Ryo Yamazaki

## 粒子の加速のされ方




超新星残骸　CasA

Shockの上流と下流を行き来して加速される( diffusive shock acceleration)




## Basic Equations

実際に解きたい方程式

**Diffusion-convection equation for electrons:**

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(vf-K\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\frac{1}{p^2}\frac{\partial}{\partial p}\left[\left(-\frac{p}{3}\frac{dv}{dx}+\frac{dp}{dt}\right)p^2 f\right]=0$$

*f(x,p,t)* : 電子の分布関数　*v(x)* : 背景流体の速度場。(衝撃波の位置はx=0)
*K(x,p)* : 電子の拡散係数

Energy loss term (via synchrotron cooling): $\dfrac{dp}{dt}=-\beta_{syn}\gamma p$、$\beta_{syn}=\dfrac{\sigma_T B^2}{6\pi m_e c}$

## 確率微分方程式　Achterberg & Krulls (1992)

$F=p^3 f$、$u=\ln(p/mc)$ とおくと、diffusion-convection eq. は

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(v+\frac{\partial K}{\partial x}\right)F\right]-\frac{\partial^2}{\partial x^2}(KF)-\frac{\partial}{\partial u}\left[\left(\frac{1}{3}\frac{du}{dx}+\beta_{syn}\gamma\right)F\right]=0$$

同値

**確率微分方程式**(1つの粒子の時間発展を記述)

$$\begin{cases} dx=\left(\underbrace{v+\dfrac{\partial K}{\partial x}}_{\text{ドリフト項}}\right)dt+\underbrace{\sqrt{2K}dw}_{\text{拡散項}} \\ du=-\left(\underbrace{\dfrac{1}{3}\dfrac{dv}{dx}}+\underbrace{\beta_{syn}\gamma}_{\text{クーリング項}}\right)dt \end{cases}$$

エネルギーの変化の仕方を表す項

平均0、分散dtのガウス分布に従う乱数。

**問題点**

衝撃波面で *v(x)* や *K(x,p)* が不連続。
=> 確率微分方程式中にデルタ関数が現れる。
=> 数値計算不可能。

多数回の試行に対して解きアンサンブル平均をとると *F* が求まる。

## Zhang (2000) による解決法

確率微分方程式中に陽にデルタ関数は現れない。

**確率微分方程式**(Zhangによる変形)

$$\begin{cases} dy=s(x)\left[\left(v(x)+\dfrac{\partial K_c}{\partial x}\right)dt+\sqrt{2K}dw\right] \\ du=-\left(\dfrac{1}{3}\dfrac{dv_c}{dx}+\beta_{syn}\gamma\right)dt-\dfrac{\Delta V}{3\Delta K}\left(dx-s^{-1}(y)dy\right) \end{cases}$$

ここで $v_c$, $K_c$ は連続関数

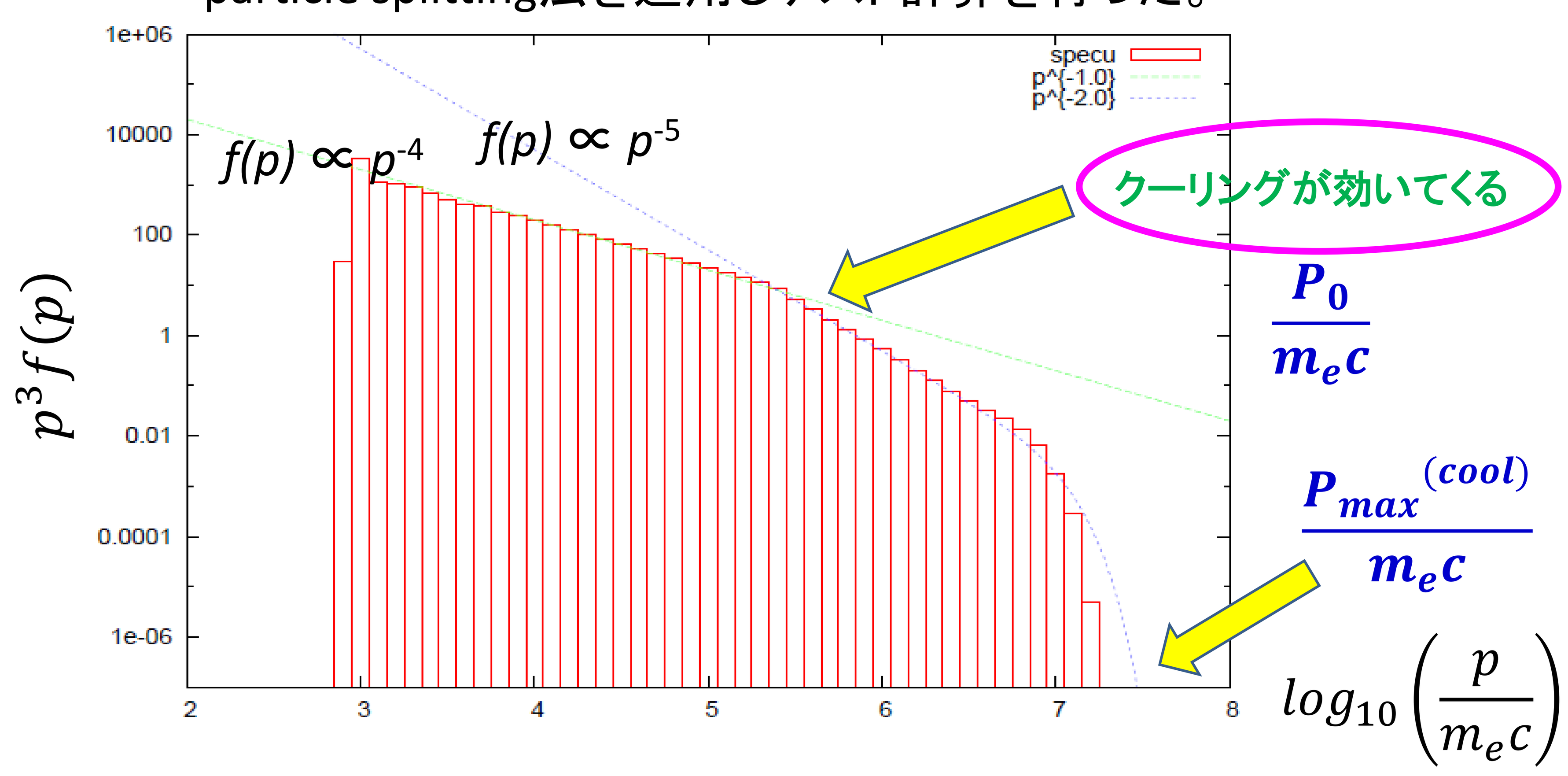
$$v(x)=v_c(x)+\frac{\Delta V}{2}sign(x)\qquad \mathrm{K}(x)=K_c(x)+\frac{\Delta K}{2}sign(x)$$

$$y=xs(x)=x\times\begin{cases}\alpha\ (x<0)\\ \dfrac{1}{2}\ (x=0)\\ 1-\alpha\ (x>0)\end{cases}$$

$$v_c=\frac{v_1+v_2}{2},\quad \Delta V=v_1-v_2,\quad \Delta K=K_1-K_2,\quad \alpha=\frac{K(0^+)}{K(0^+)+K(0^-)}$$

## 結果：電子のエネルギー・スペクトル(粒子数10000)

1次元定常衝撃波についてZhang(2000)の方法とparticle splitting法を適用しテスト計算を行った。




## まとめ

シンクロトロン冷却の効果が重要となるパラメータ領域でのテスト計算を行い、解析的結果を再現することができた。

## 今後の展望＆課題

〇より計算精度を上げ、被加速電子のスペクトルの最高エネルギー帯域のカットオフの形を精査する。
〇被加速粒子の背景流体への反作用を考慮した「非線形モデル」の計算コード開発を行う。
〇最少時間で計算できるようにプログラミングの改善をする。

# 確率微分方程式を用いた宇宙線粒子加速シミュレーション・コードの開発

青山学院大学 修士2年 中島 良介


## Abstract

我々の天の川銀河内の天体で加速される宇宙線粒子のエネルギーは10の15.5 乗eVまで到達すると考えられている。その加速機構の最有力候補がdiffusive shock accelerationであり、被加速粒子の分布関数は移流拡散方程式に よって記述される。しかし、定常状態などの特別な場合を除き解析的に解くのは難しく、数値計算が必須となる。そこで私は超新星残骸周辺の衝撃波により加速された粒子の分布関数を計算する数値計算法を開発している。具体的には高エネルギー粒子の分布関数の満たす移流拡散方程式を解くことが目標だが、これを解析的に解くことは困難である。そこで、確率微分方程式を用いた計算法の開発を試みた。当初、この方法では衝撃波面で流体速度場が不連続になるということから発散項が出てきてしまうために、観測結果を再現することができなかった。しかし、これはM. Zhang (2000)の手法によって解決された。今回の発表では、M. Zhang (2000)によって変形された確率微分方程式を用いて数値計算を行い、高エネルギー粒子のエネルギースペクトルのテスト計算を行った。また、数値計算による統計精度を上げるため、particle splittingという粒子の統計的重みを考え粒子を分割していく手法も用いた。


## 研究の目的

〇数値計算を用いて、エネルギースペクトルの最高エネルギー帯域でのカットオフの形を精査する
〇電子のシンクロトロン放射は観測されているが、陽子の場合はどのようになるのか考察する

## SNRによってどのエネルギーまで加速されるか

**SNRで加速できる最高エネルギー**

$E_{max} \sim e\,B\,R \sim 10^{15}\,\mathrm{eV}\ \ B_{\mu G}\,R_{pc}$

**どのくらい作る必要あるか？**

$$\frac{1\ \mathrm{eV\ cc^{-1}} \times 10^{66}\mathrm{cc}}{10^{7}\mathrm{yrs}} \sim 10^{40}\ \mathrm{erg\ s^{-1}}$$

銀河の体積

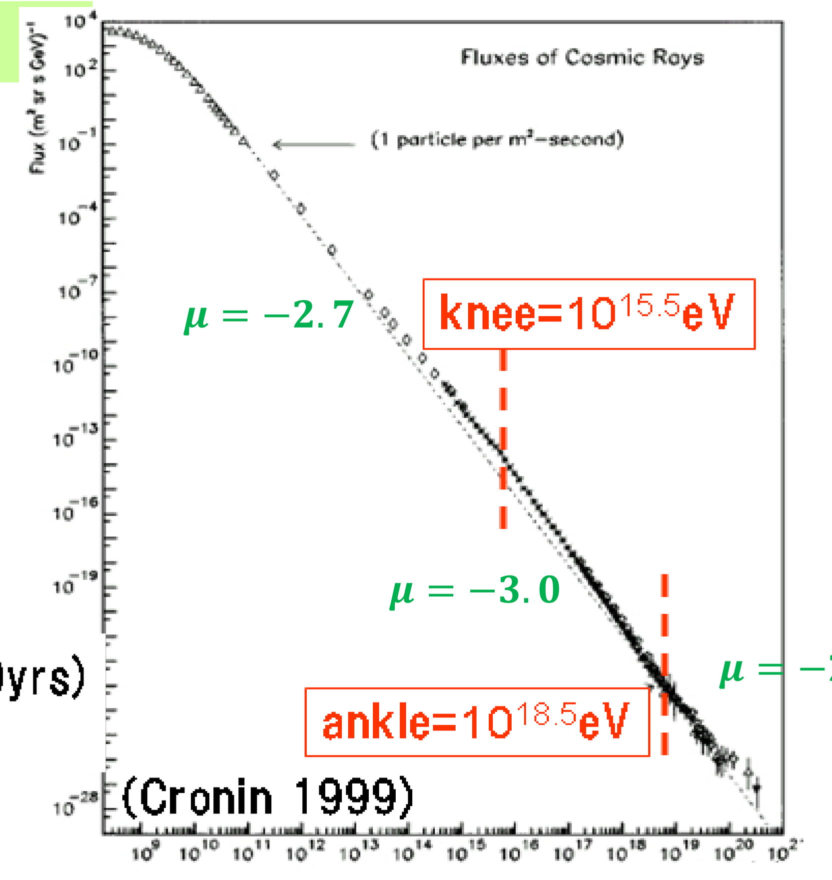
拡散 timescale

CR luminosity

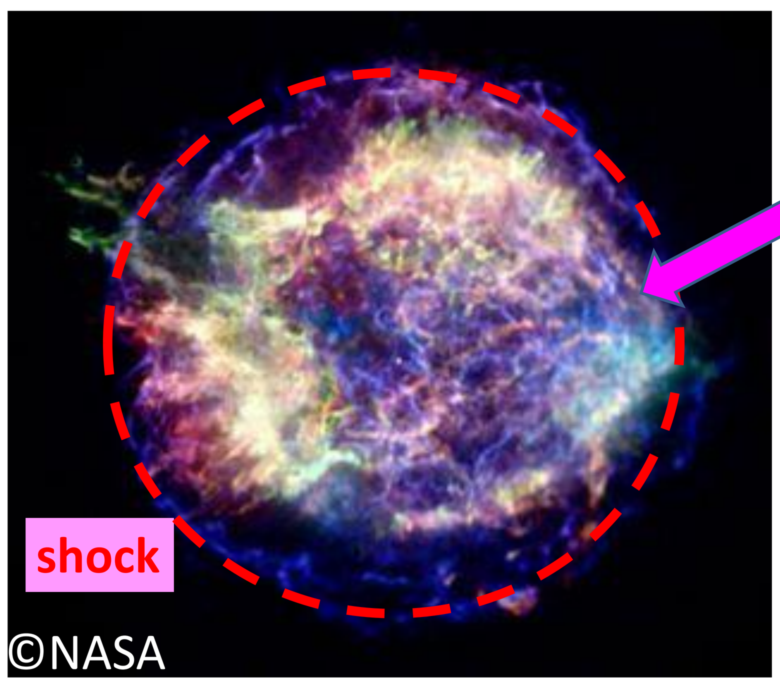
これは超新星残骸(SNR)でまかなえる。

$10^{51}$erg×(変換効率～1%)×(SN rate～1/30yrs) ～ $10^{40}$ erg $s^{-1}$

Ryo Yamazaki

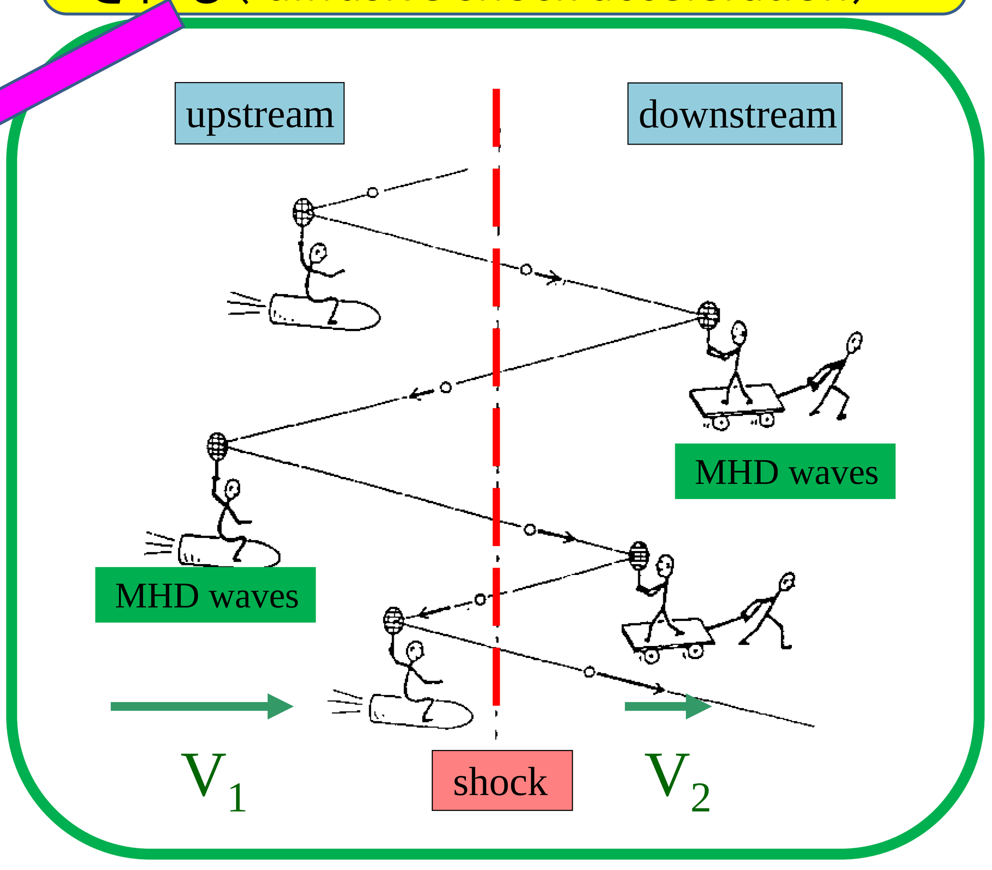



## 粒子の加速のされ方




超新星残骸 CasA

Shockの上流と下流を行き来して加速される( diffusive shock acceleration)




## Basic Equations

実際に解きたい方程式

**Diffusion-convection equation for electrons:**

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(vf - K\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{1}{p^2}\frac{\partial}{\partial p}\left[\left(-\frac{p}{3}\frac{dv}{dx} + \frac{dp}{dt}\right)p^2 f\right] = 0$$

*f(x,p,t)* : 電子の分布関数　*v(x)* : 背景流体の速度場。(衝撃波の位置はx=0)
*K(x,p)* : 電子の拡散係数

Energy loss term (via synchrotron cooling): $\frac{dp}{dt} = -\beta_{syn}\gamma p$、$\beta_{syn} = \frac{\sigma_T B^2}{6\pi m_e c}$

## 確率微分方程式 Achterberg & Krulls (1992)

$F = p^3 f$、$u = \ln(p/mc)$ とおくと、diffusion-convection eq. は

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(v + \frac{\partial K}{\partial x}\right)F\right] - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(KF) - \frac{\partial}{\partial u}\left[\left(\frac{1}{3}\frac{du}{dx} + \beta_{syn}\gamma\right)F\right] = 0$$

同値

確率微分方程式(1つの粒子の時間発展を記述)

平均0、分散dtのガウス分布に従う乱数。

$$\begin{cases} dx = \underbrace{\left(v + \frac{\partial K}{\partial x}\right)dt}_{\text{ドリフト項}} + \underbrace{\sqrt{2K}dw}_{\text{拡散項}} \\ du = -\left(\underbrace{\frac{1}{3}\frac{dv}{dx}}_{} + \underbrace{\beta_{syn}\gamma}_{\text{クーリング項}}\right)dt \end{cases}$$

エネルギーの変化の仕方を表す項

**問題点**

衝撃波面で *v(x)* や *K(x,p)* が不連続。
=> 確率微分方程式中にデルタ関数が現れる。
=> 数値計算不可能。

多数回の試行に対して解きアンサンブル平均をとると *F* が求まる。

## Zhang (2000) による解決法

確率微分方程式中に陽にデルタ関数は現れない。

確率微分方程式(Zhangによる変形)

$$\begin{cases} dy = s(x)\left[\left(v(x) + \frac{\partial K_c}{\partial x}\right)dt + \sqrt{2K}dw\right] \\ du = -\left(\frac{1}{3}\frac{dv_c}{dx} + \beta_{syn}\gamma\right)dt - \frac{\Delta V}{3\Delta K}(dx - s^{-1}(y)dy) \end{cases}$$

ここで $v_c$, $K_c$ は連続関数

$$v(x) = v_c(x) + \frac{\Delta V}{2}sign(x)$$

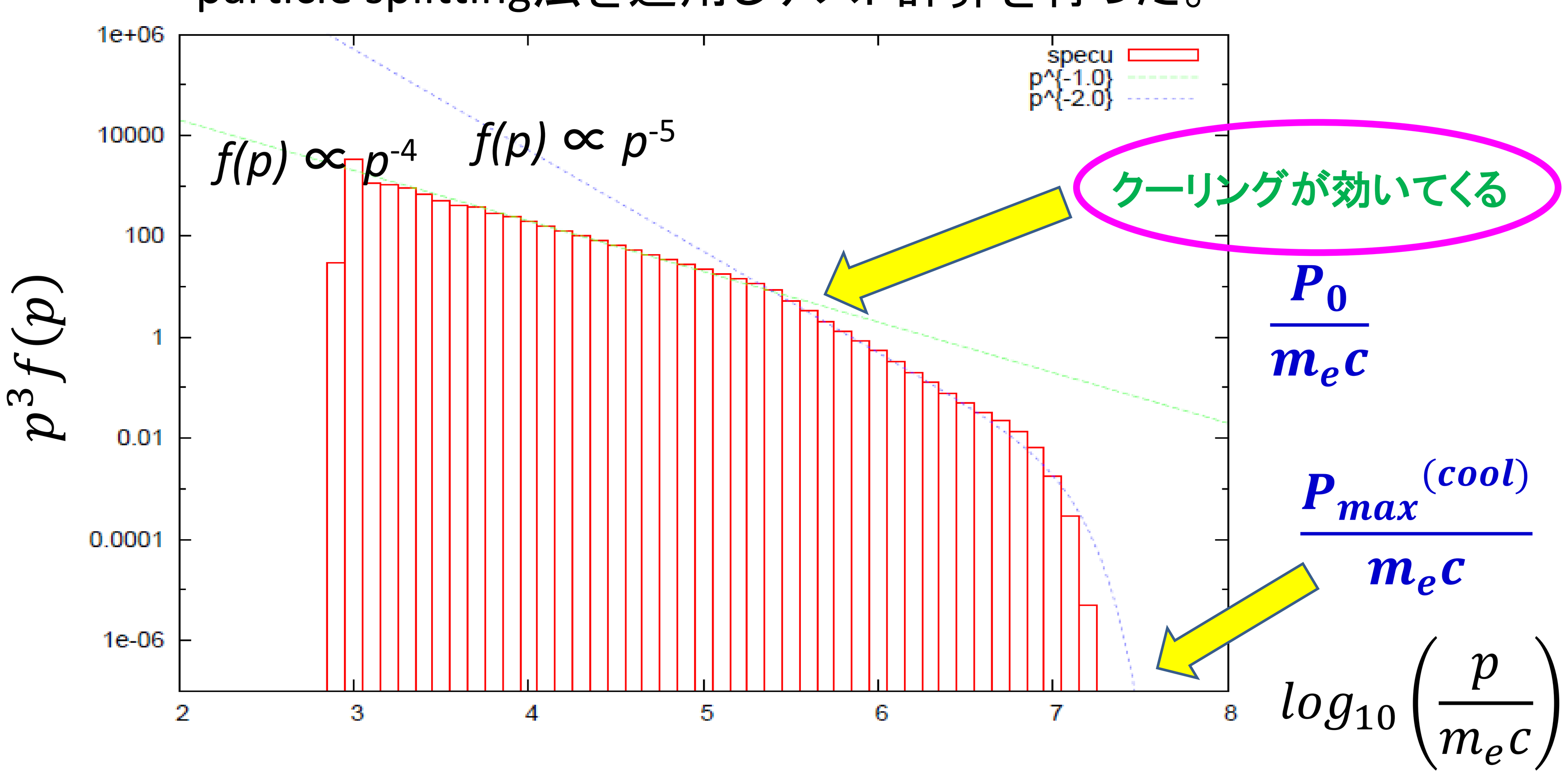
$$\mathrm{K}(x) = K_c(x) + \frac{\Delta K}{2}sign(x)$$

$$y = xs(x) = x \times \begin{cases} \alpha (x < 0) \\ \frac{1}{2}(x = 0) \\ 1 - \alpha (x > 0) \end{cases}$$

$$v_c = \frac{v_1 + v_2}{2}$$
$$\Delta V = v_1 - v_2$$
$$\Delta K = K_1 - K_2$$
$$\alpha = \frac{K(0^+)}{K(0^+) + K(0^-)}$$

## 結果：電子のエネルギー・スペクトル(粒子数10000)

1次元定常衝撃波についてZhang(2000)の方法とparticle splitting法を適用しテスト計算を行った。




### まとめ

シンクロトロン冷却の効果が重要となるパラメータ領域でのテスト計算を行い、解析的結果を再現することができた。

### 今後の展望＆課題

〇より計算精度を上げ、被加速電子のスペクトルの最高エネルギー帯域のカットオフの形を精査する。
〇被加速粒子の背景流体への反作用を考慮した「非線形モデル」の計算コード開発を行う。
〇最少時間で計算できるようにプログラミングの改善をする。