流体方程式の数値的取り扱いについて

名古屋大学理学研究科 井尾勇貴

乱流現象の理解は分子雲中での星形成や降着円盤などの天体現象の理解において非常に重要である。しかし、乱流を記述する Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \boldsymbol{v} \tag{1}$$

を解析的に取り扱うことは非常に困難である。そこで、シミュレーションを用いた解析が重要になる。天体物理学の問題の多くは Reynolds 数 $\mathrm{Re} = vL/\nu$ が非常に大きいので、物理量の分布が滑らかな部分では粘性を無視することができる。数値計算を行う際に以下のような粘性を無視した流体力学の方程式系を考える。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{v}) + \nabla \cdot (P + \rho \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}) = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot [(E + P)\, \boldsymbol{v}] = 0 \tag{4}$$

ここで、E は単位体積あたりの流体のエネルギー

$$E = \frac{P}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho v^2 \tag{5}$$

である。この方程式系の非線形性を見るために方程式系の厳密解である簡単はと呼ばれる有限振幅の音波に相当する解を考える。図 1 のように (a) であらわされる三角関数的な厳密解は非線形性により (b) のような切り立ちが起こり、有限時間のうちに (c) であらわされるような多価関数になる。この多価関数は物理的な解では無く、現実には衝撃波が立ち、実線のような解が実現される。

この衝撃波を含む解はこの方程式系の弱解であり、この方程式の解とはいえない。つまり、方程式系に従って時間発展したにもかかわらず、有限の時間のうちにこの方程式系では記述されない状態に陥ってしまう。

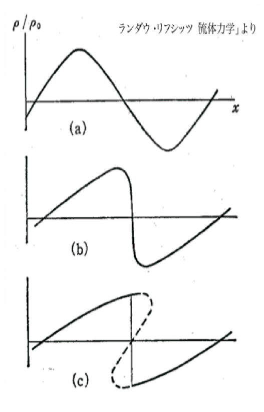

図 1: 簡単波

この問題は粘性が大きくなる衝撃波に相当する部分においても粘性を無視してしまったために起きる現象であり、衝撃波が立つ場所で必要な粘性を導入すれば解消される。しかし、現実的には粘性項の大きさは $\eta\Delta v^2/\Delta x^2$ であり、空間の刻み幅 Δx を充分小さくとらないと粘性は必要な大きさにならず、衝撃を模擬できなくなり計算が破綻してしまう。また、粘性係数 η を分子運動的に決まる物理的な値よりも大きくして計算すると衝撃波を模擬できるようになるが不必要に大きい粘性項によって解の滑らかな部分でも効いてしまい、本来の解を得ることができなくなる。必要かつできるだけ小さい粘性を自動に入るようにし、この問題を解決する Godunov の方法がある。この方法は空間を有限体積の要素 (セル) に分割し、セルの境界での Riemann 問題を解いた結果を用いてセル内の物理量の変化を支配する数値流束を計算する方法である。ここで、Riemann 問題とは２つの異なる状態の流体が接している場合のその後の時間発展を記述する問題である。

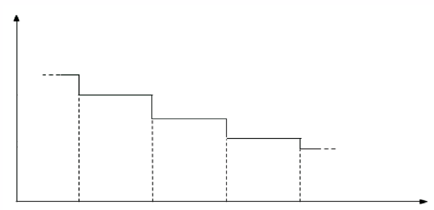

図 2: Godunov 法での物理量の初期配置

godunov 法は図２のように空間的に一定の２つの状態の不連続面から始まる非線形の波野次官発展の厳密解を用いる。このため、衝撃波を考慮して数値流束を計算することになるため、衝撃波を安定に記述することができる。

参考文献

[1] ランダウ・リフシッツ、「流体力学２」、東京図書

[2] S. K. Godunov, Mat. Sb. 47, 271 (1959)