重力波検出器における標準量子限界の突破

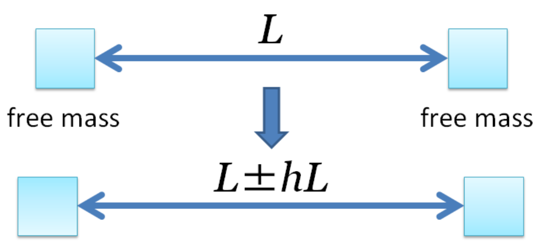
大阪大学宇宙進化グループ M2　髙倉　理

0.　概要

今まで地上重力波検出器は重力波の直接観測に成功していない。しかし、現在、年数十イベントの重力波観測が期待される感度を持つ次世代地上重力波望遠鏡が世界中で建設されており、欧米では advanced LIGO, advanced Virgo が、日本では KAGRA (旧 LCGT) が建設中である。これらの検出器が目標の感度を実現できれば、重力波天文学が拓ける日も近いだろう。 しかし、これら大型レーザー干渉計型重力波検出器の感度はショットノイズと輻射圧ノイズの不確定性関係によって決まる標準量子限界(Standard Quantum Limit) に迫りつつあり、現在の検出方法のままでは原理的にこれ以上感度を上げることができない。さらに感度を上げ、重力波天文学を発展させるには、SQL を破る測定方法の考案、および、実験による実証が必要となる。本講演では現在までに考えられている SQL を超える観測方法について、レビュー[i]を行う。

1.　イントロ

重力波は時空のさざなみである。振幅 h の重力波が距離 L だけ離れた 2 つの free mass に入射した場合、互いの間隔は hL だけ伸び縮みする。



この伸び縮みの変位を測定し、重力波を検出しようと思うと、少なくとも位置測定の精度 Δx は

$$\Delta x \ \sim\ hL$$

必要である。このときの free mass の運動量変動 Δp は、free mass の質量を M、重力波の角振動数を Ωとして、

$$\Delta p \ \sim\ M\Omega\,\Delta x \ \sim\ M\Omega L\,h$$

程度である。すると、free mass の不確定性関係

$$\Delta x \cdot \Delta p \ \geqq\ \hbar/2 \qquad (\hbar \text{ はプランク定数}/2\pi)$$

から、

$$h \geqq \left(\frac{\hbar}{2M\Omega L^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

という限界が得られる。この限界はプローブ(今の場合、free mass) を古典的に扱ってよい限界であり、これより微小な重力波を検出しようと思うと量子力学的扱いが必要になる。これが概ね SQL である。

実際に現在日本で建設中の KAGRA を想定し、$M\ \sim 10^4$ g, $L\ \sim 3\times10^5$ cm, $\Omega\ \sim 100$ Hz$\times 2\pi$, $\hbar\ \sim 1\times10^{-27}$ erg・s を代入すると

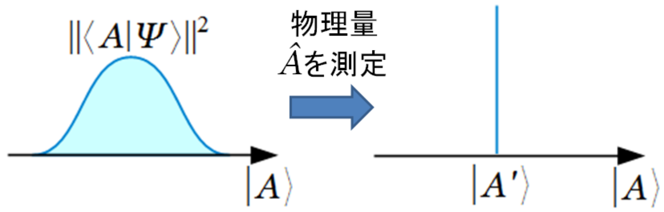
$$h\ \geqq\ 3\times10^{-23}$$

であり、予定感度曲線は SQL に達する。

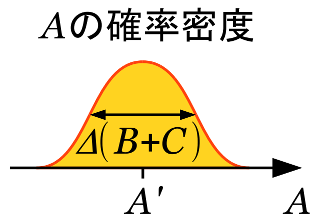
2.　量子測定、量子ノイズ

量子力学的な測定を考えるにあたって、解釈の立場を述べる。測定とは[ii]、対象とする系にプローブを相互作用させ、系の物理量を別の物理量に変換する、という工程を数段階行って取り出し、データとして記録すること、そして得られたデータを各工程の変換則に従って逆変換していき、知りたい物理量を推定することである。ここでは最初、物理量は量子的だが、ある段階(強測定を行ったとき)に確率分布に従うフォン・ノイマン的射影が起こり古典的になると考える。(コペンハーゲン解釈)

最も簡単なのは最初の変換でいきなり古典量になる直接測定である。例えば波動関数$|\Psi\rangle$で表される系の物理量$\hat{A}$を測定すると、確率分布$\|\langle A|\Psi\rangle\|^2$に従って測定値$A'$が得られる。このとき、波束の収縮が起こるので、波動関数も$|A'\rangle$になり、測定誤差ΔAはゼロ[iii]である。



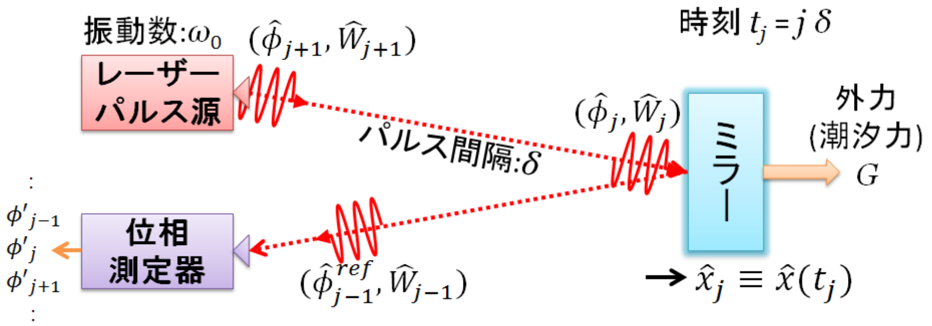
次に数段階量子的に扱う[iv]間接測定を考える。プローブによる物理量の変換に伴い、測定対象の系の$\hat{A}$と非可換な物理量$\hat{B}$や、プローブの物理量$\hat{C}$が混ざる。よって、古典段階に移るときに測定される観測量は$\hat{A}$ではなく、$\hat{O} = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$となってしまう。$\hat{O}$の測定値$O'$から推定できる$\hat{A}$の測定値は$A' = O' - \langle B\rangle - \langle C\rangle$であり、$A = O' - B - C$より$\Delta(B + C)$だけ不確かである。故に有限の測定誤差$\Delta A$が生じる。これが量子ノイズである。



$\hat{O}$に$\hat{B}$が混ざっていたり、$\hat{C}$が非可換な物理量を含んでいたりすると、不確定性関係により、測定誤差に限界が生じる。これが SQL である。SQL を突破するには、$\hat{B}$が混ざらないようにし、$\hat{C}$が非可換な物理量を含まないようにすればよい。

3. 重力波検出器の Toy-Model

もう少し具体的に扱うため、右図のような重力波検出器を考える。



レーザーパルス源から振動数ω_0のパルスを時間間隔δで発射し、ミラーに反射させ、位相測定器で反射後の位相を測定する。

時間とエネルギーの不確定性関係から、パルスのエネルギーと位相には量子揺らぎが存在する。それぞれ、

$\hat{W}_j$　: j 番目パルスのエネルギーのゆらぎ

$\hat{\phi}_j$　: j 番目パルスの位相　(発射時間のゆらぎ×ω_0)

とする。また、測定の前後において

$\hat{\phi}^{ref}_j$: j 番目パルスの反射後の位相

ϕ'_j　: j 番目パルスの反射後の位相の測定値

とする。

まず、この装置を使った位置測定について考える。ミラーの位置が$\hat{x}$のとき、位相は$2\omega_0\hat{x}/c$遅れるので、

$$\hat{\phi}^{ref}_j = \hat{\phi}_j - 2\omega_0\hat{x}_j/c$$

が成り立つ。よって、位置の測定値は

$$x'_j \equiv -\frac{c}{2\omega_0}\phi'_j = x_j - \frac{c}{2\omega_0}\phi_j$$

であり、測定誤差は

$$\Delta x = \frac{c}{2\omega_0}\Delta\phi$$

である。

一方、パルスは反射するときに輻射圧による力積を与えるので、運動量に与える擾乱(back action)は

$$\hat{p}^{b.a.}_j = 2\hat{W}_j/c$$

であり、そのばらつきは

$$\Delta p = \frac{2}{c}\Delta W$$

である。

これらより、

$$\Delta x \cdot \Delta p = \frac{\Delta\phi \cdot \Delta W}{\omega_0} \geq \frac{\hbar}{2}$$

となり、不確定性関係が成り立つことが分かる。

さて、重力波による潮汐力Gを求める。運動方程式

$$\frac{d^2\hat{x}}{dt^2} = G + \hat{F}^{b.a.}$$

をフーリエ変換すると[v]

$$-M\Omega_k^2\hat{x}_k = G_k + \frac{2}{\delta c}\hat{W}_k$$

となる。しかし、測定値はx'_jなので、

$$G'_k \equiv -M\Omega_k^2 x'_k = G_k + M\Omega_k^2\frac{c}{2\omega_0}\phi_k + \frac{2}{\delta c}W_k$$

が外力Gのフーリエ成分の測定値である。右辺第二項がショットノイズ、第三項が輻射圧ノイズである。ϕとWは非可換であるから、SQL に制限される。

実際、ノイズスペクトルは

$$\Delta G'^2_k = M^2\Omega_k^4\frac{c^2\delta}{4\omega_0^2}\Delta\phi^2 + \frac{4}{c^2\delta}\Delta W^2 \geq \hbar M\Omega_k^2$$

となる。

4. SQL の突破①: ホモダイン測定

SQL を突破する第一段階として、位相測定器をホモダイン測定器に変える。すると、θをホモダイン角、W_0をパルスの平均エネルギーとして、

$$\hat{O}_j = -\hat{\phi}^{ref}_j\sin\theta + \frac{\hat{W}_j}{2W_0}\cos\theta$$

を測定することが可能になる。これは、定性的には$\hat{\phi}$-$\hat{W}$平面において測定する角度を変えることに相当する。

3.と同様にすると、位置の測定値は

$$x'_j \equiv \frac{c}{2\omega_0\sin\theta}O'_j = x_j - \frac{c}{2\omega_0}\phi_j + \frac{c}{4\omega_0}\frac{W_j}{W_0}\cot\theta$$

であり、外力のフーリエ成分の測定値は

$$G'_k = G_k + M\Omega_k^2\frac{c}{2\omega_0}\phi_k + \frac{2}{\delta c}\left(1 - \frac{\Omega_k^2}{\Omega_*^2}\cot\theta\right)W_k$$

となる。ただし、$\Omega_* \equiv \sqrt{8\omega_0 W_0/Mc^2\delta}$とおいた。

右辺第三項を見ると、$\Omega_k = \Omega_*\tan^{1/2}\theta$という特定の振動数では$W_k$が消え、ノイズが$\Delta\phi$だけで決まるため、SQL を突破できることがわかる。

5. SQL の突破②: speed meter

さらに、パルスの経路を変更し、τ の時間をあけて、ミラーの前後で反射させる。2 回目の反射後の位相は

$$\hat{\phi}^{ref}_j = \hat{\phi}_j + \frac{2\omega_0}{c}\tau\frac{\hat{x}(t_j) - \hat{x}(t_j - \tau)}{\tau}$$

となるため、$t_j - \tau$ からt_j までの平均速度を測定できる。

一方、輻射圧の力積は

$$\hat{p}^{b.a.}_j = \frac{2}{c}(\hat{W}_{j+\frac{\tau}{\delta}} - \hat{W}_j)$$

と変更される。ホモダイン検出し、フーリエ変換して計算すると、外力のフーリエ成分の測定値は

$$G'_k = G_k + M\Omega_k\frac{c}{2\omega_0}\frac{1}{i\tau}\phi_k - \frac{2}{\delta c}i\Omega_k\tau\left(1 - \frac{1}{\Omega_*^2\tau^2}\cot\theta\right)W_k$$

となる。$\cot\theta = \Omega_*^2\tau^2$とすれば、任意の振動数$\Omega_k$で$W_k$が消せるので、$\Delta\phi$のノイズだけで測定が可能であり、SQL を突破することができる。

---

i　S. L. Danilishin & F. Y. Khalili　Living Rev. Relativity 15 (2012), 5

ii　これは関連する論文を読んだ結果行き着いた個人的な定義である。

iii　理想的な測定を考える。現実には系統誤差が存在する。量子ノイズが

iv　系統誤差が量子ノイズより小さくなったとき。

v　$t_j - \delta/2$から$t_j + \delta/2$まで積分して差分方程式にし、

$$A_k = \sum_{j=0}^{n-1} A_j e^{i\Omega_k t_j}\delta \leftrightarrow A_j = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{n-1} A_k e^{-i\Omega_k t_j}\frac{2\pi}{n\delta}$$

で離散フーリエ変換する。ただし、nはデータ数、$\Omega_k \equiv 2\pi k/n\delta$。