

# ゆらぎの発展に対する くりこみの方法

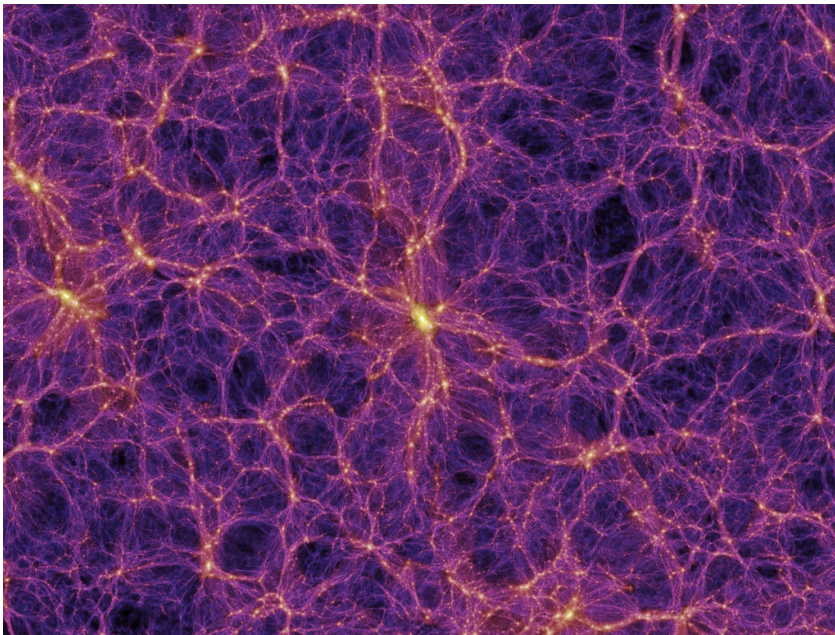
岡アキラ

東京大学 宇宙理論研究室

# 宇宙の大規模構造

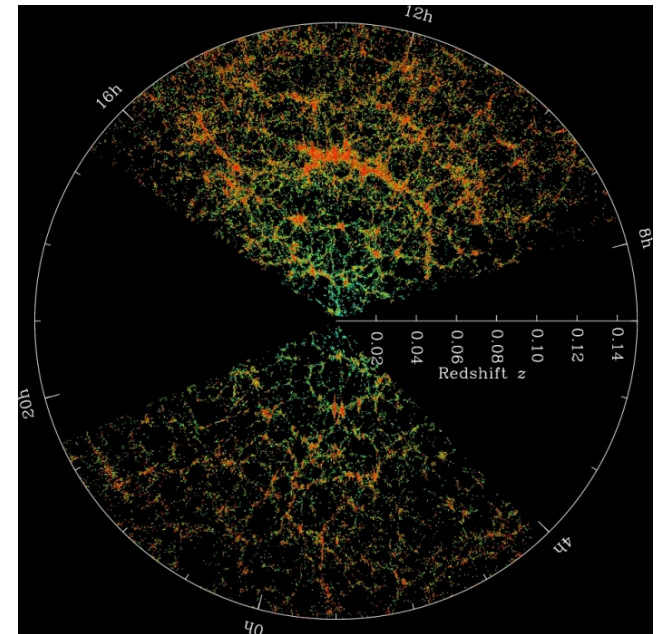
宇宙の物質分布はあみあみ！不思議！

N体シミュレーション



Springel et al. (2004)

観測結果



SDSS-III

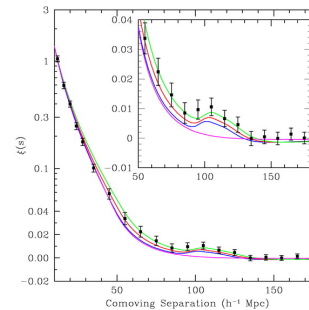
# 大規模構造の定量化

どれくらい銀河が集まっているか？  
 であみあみ具合を表現

Eisenstein et al. (2005)

Correlation function (Real space)

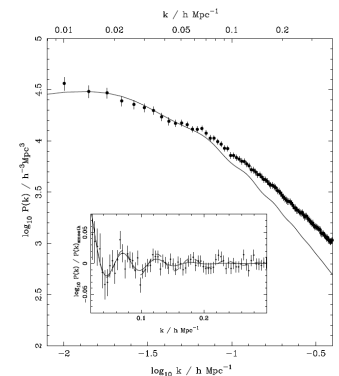
$$\xi(|\vec{r} - \vec{r}'|) = \langle \delta(\vec{r})\delta(\vec{r}') \rangle \rightarrow$$



Percival et al. (2007)

Power spectrum (Fourier space)

$$(2\pi)^3 \delta_D(\vec{k} + \vec{k}') P(k) = \langle \delta(\vec{k})\delta(\vec{k}') \rangle \rightarrow$$



これらを計算で知りたい!

# 構造形成の基礎方程式

## 流体の基礎方程式 + 宇宙膨張の効果

Continuity equation

$$\frac{\partial \delta(\mathbf{k}, t)}{\partial t} + a(t)H(t)\theta(\mathbf{k}, t) = -a(t)H(t) \int d^3\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_{12}) \times \alpha(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)\theta(\mathbf{k}_1, t)\delta(\mathbf{k}_2, t),$$

Euler equation

$$\frac{\partial \theta(\mathbf{k}, t)}{\partial t} + a(t)H(t)\theta(\mathbf{k}, t) + \frac{3}{2}\Omega_m a(t)^2 H(t)^2 \delta(\mathbf{k}, t) = -a(t)^2 H(t)^2 \times \int d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2 \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_{12})\beta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)\theta(\mathbf{k}_1, t)\theta(\mathbf{k}_2, t),$$

mode coupling

$$\alpha(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{\mathbf{k}_{12} \cdot \mathbf{k}_1}{k_1^2},$$

$$\beta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{k_{12}^2(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)}{2k_1^2 k_2^2}.$$

これを解けば良い!

→ でもどうやって...? 4

# 1. 線形近似

基礎方程式でゆらぎの2次以上を無視!

Continuity equation

$$\frac{\partial \delta(\mathbf{k}, t)}{\partial t} + a(t)H(t)\theta(\mathbf{k}, t) = 0,$$

← 解析的に解ける!



Euler equation

$$\frac{\partial \theta(\mathbf{k}, t)}{\partial t} + a(t)H(t)\theta(\mathbf{k}, t) + \frac{3}{2}\Omega_m a(t)^2 H(t)^2 \delta(\mathbf{k}, t) = 0.$$

## 2. 摂動論 (SPT)

線形解による展開を行う!

$$\tilde{\delta}(\mathbf{k}, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n(\tau) \delta_n(\mathbf{k}), \quad \tilde{\theta}(\mathbf{k}, \tau) = -\mathcal{H}(\tau) \sum_{n=1}^{\infty} a^n(\tau) \theta_n(\mathbf{k}),$$

$$\delta_n(\mathbf{k}) = \int d^3 \mathbf{q}_1 \dots \int d^3 \mathbf{q}_n \delta_{\text{D}}(\mathbf{k} - \mathbf{q}_{1\dots n}) F_n(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) \delta_0(\mathbf{q}_1) \dots \delta_0(\mathbf{q}_n),$$

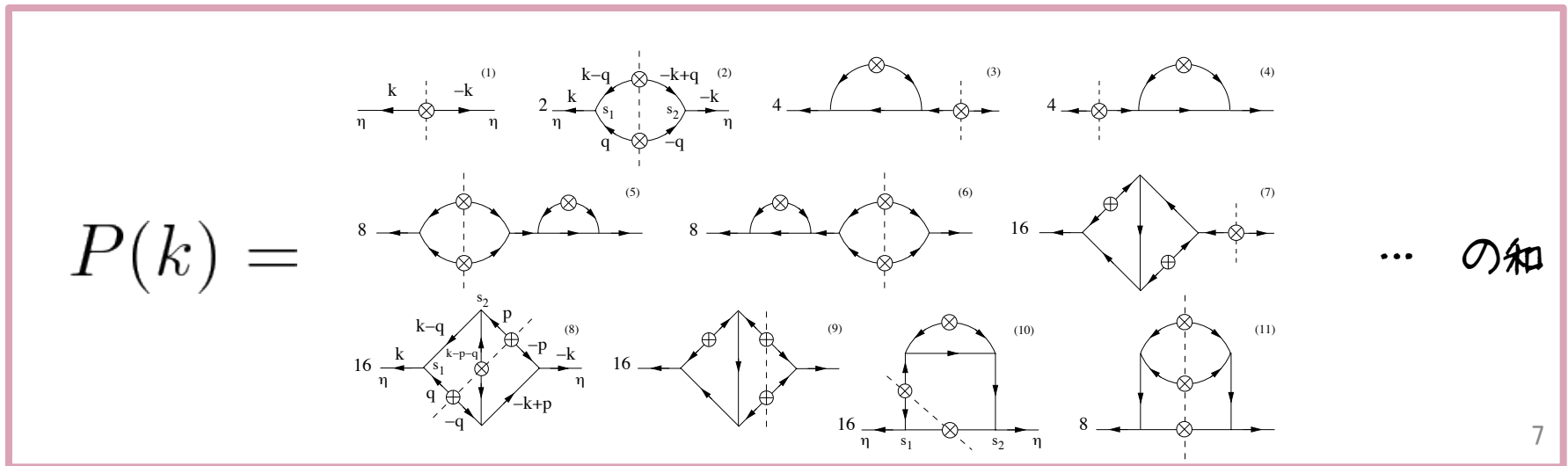
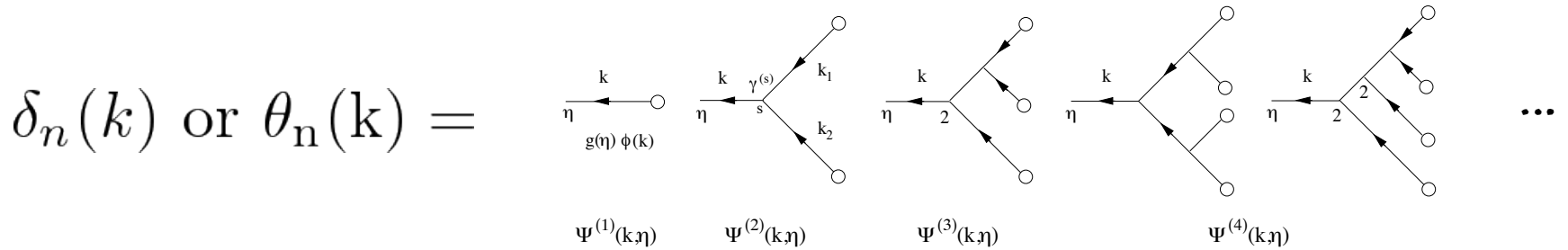
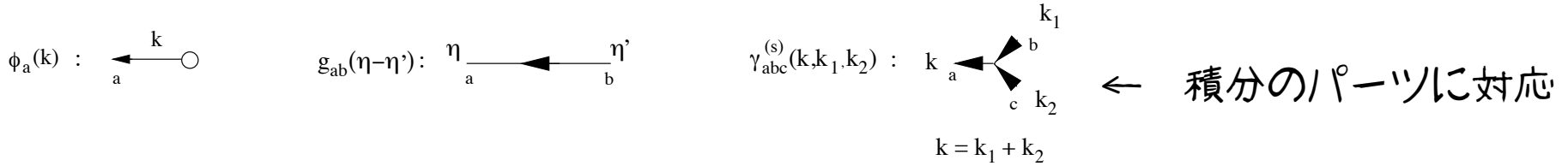
$$\theta_n(\mathbf{k}) = \int d^3 \mathbf{q}_1 \dots \int d^3 \mathbf{q}_n \delta_{\text{D}}(\mathbf{k} - \mathbf{q}_{1\dots n}) G_n(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) \delta_0(\mathbf{q}_1) \dots \delta_0(\mathbf{q}_n),$$

$$F_n(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{G_m(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m)}{(2n+3)(n-1)} \left[ (2n+1)\alpha(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) F_{n-m}(\mathbf{q}_{m+1}, \dots, \mathbf{q}_n) + 2\beta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) G_{n-m}(\mathbf{q}_{m+1}, \dots, \mathbf{q}_n) \right],$$

$$G_n(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{G_m(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m)}{(2n+3)(n-1)} \left[ 3\alpha(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) F_{n-m}(\mathbf{q}_{m+1}, \dots, \mathbf{q}_n) + 2n\beta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) G_{n-m}(\mathbf{q}_{m+1}, \dots, \mathbf{q}_n) \right],$$

見た目が複雑...

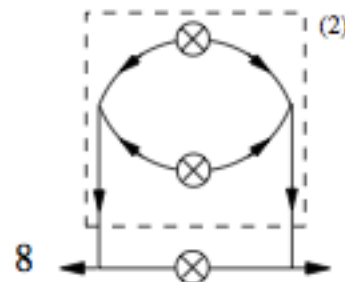
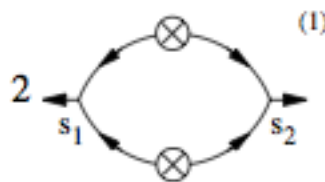
# 積分のグラフによる表現



# 3. くりこみ (RPT)

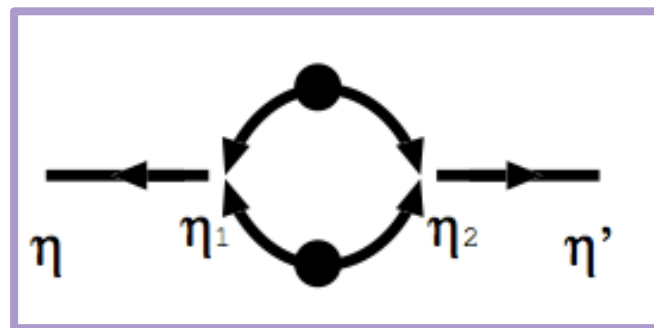
摂動展開を部分的に再和する!

グラフの中に  
他のグラフを含むものは  
同じグラフで表す!



...

無限個の足し算の中に  
共通項を見つけて  
因数分解している感じ!





# 積分方程式のグラフによる表現

すごく難しくてここに載せるのがはばかれるほど複雑な式

or

$$P_{ab}(k; \eta, \eta') = \left[ \text{graph with a dot} \right] = \left[ \text{graph with a cross} \right] + 2 \left[ \text{graph with a loop} \right] + \dots$$

左辺 = 無限個のグラフの和

→ 結局このままでは無限個の和が残っていて解けない!

# Closure近似

無限個の和をなんとかして式を閉じたい!

1. mode coupling に入ってくる高次の効果は無視する。
2. 1ループ以上のグラフは無視する。

$$P_{ab}(k; \eta, \eta')$$

The diagrammatic equation is:
 
$$\text{Propagator}(\eta, \eta') \text{ with self-energy dot} = \text{Propagator}(\eta, \eta') \text{ with self-energy circle-x} + 2 \times \text{Propagator}(\eta, \eta') \text{ with one-loop bubble}$$

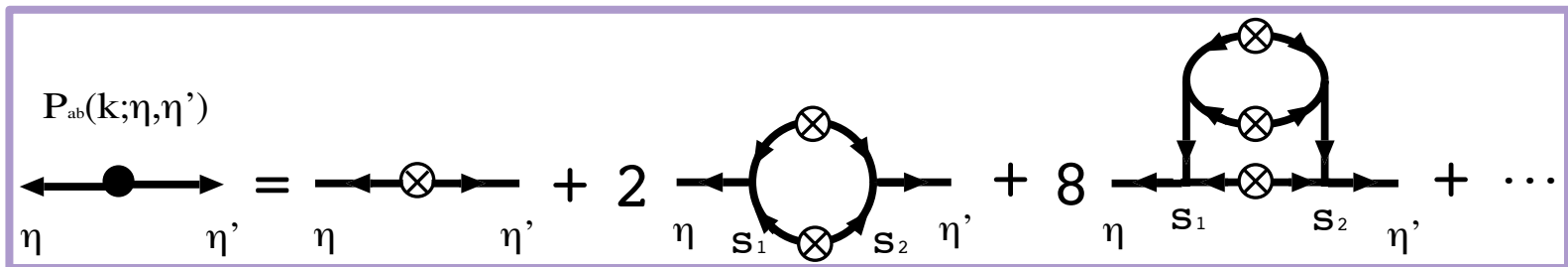
残念ながらあんまり物理的意味はなくてとりあえずやってみたら上手くいった系

# Closure近似をした後で

方程式が閉じたので逐次近似で解ける！

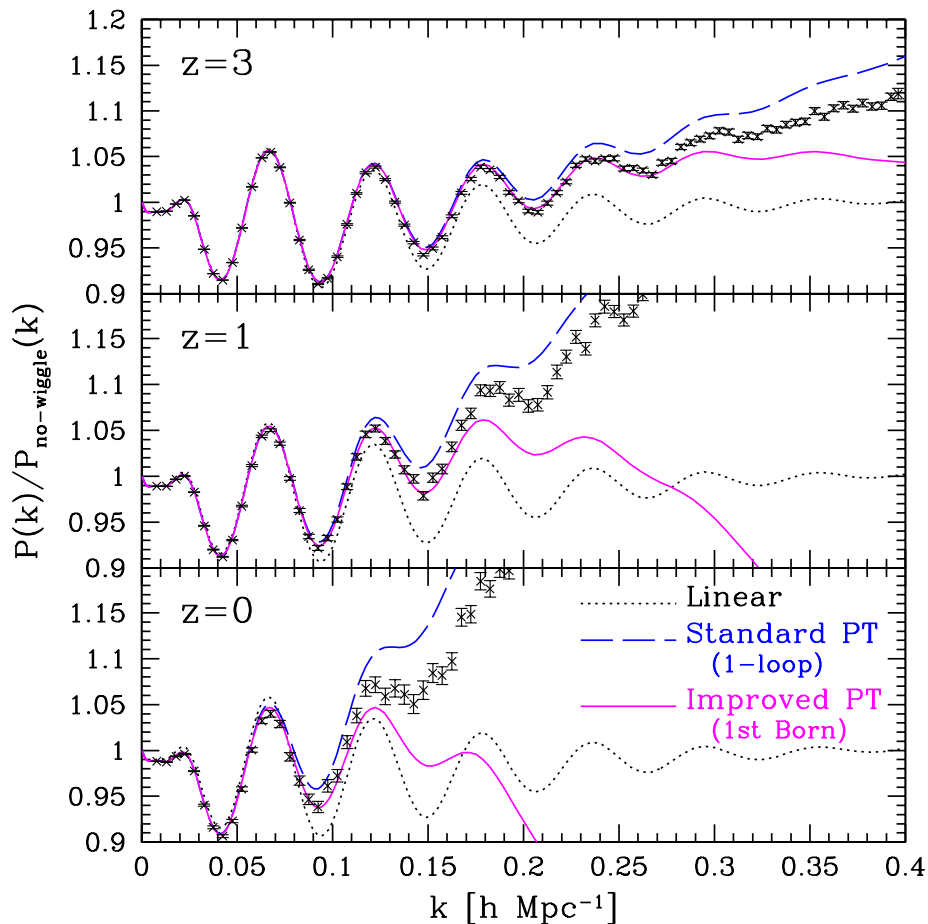
$$P_{ab}(k; \eta) = \tilde{G}_a(k|\eta, \eta_0) \tilde{G}_b(k|\eta, \eta_0) e^{2\eta_0} P_0(k) + P_{ab}^{(MC1)}(k; \eta) + P_{ab}^{(MC2)}(k; \eta) + \dots,$$

or

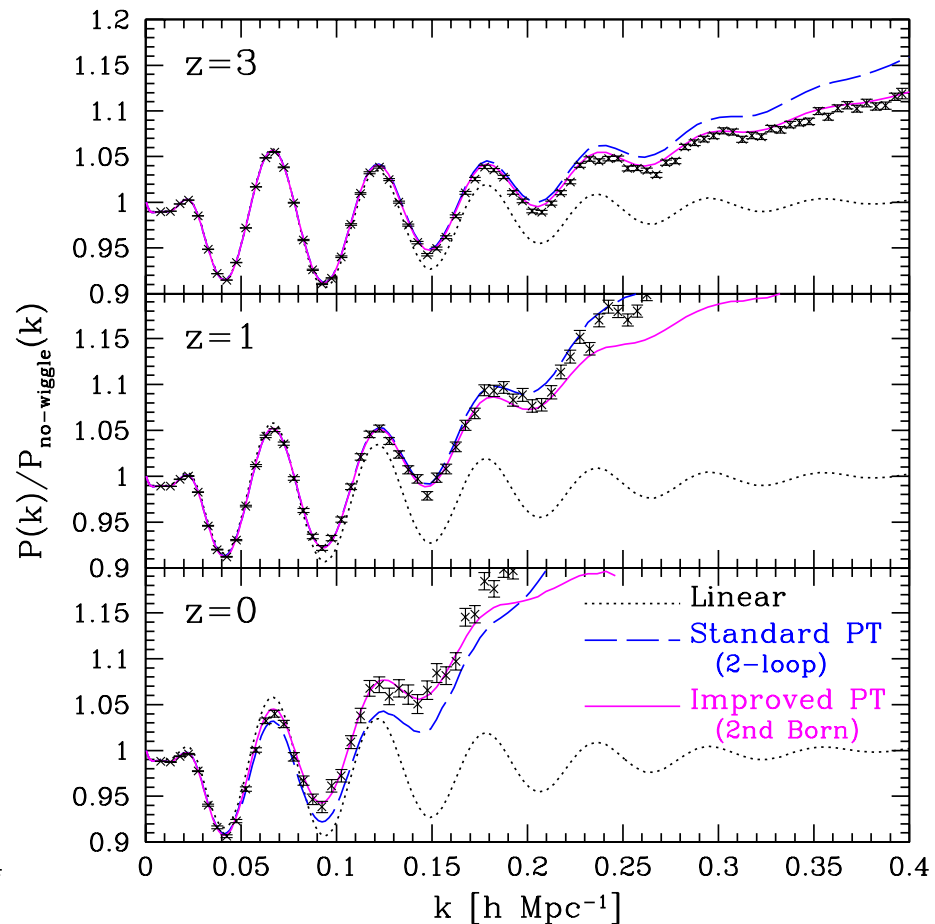


# それぞれの近似の予言能力の比較

1st order

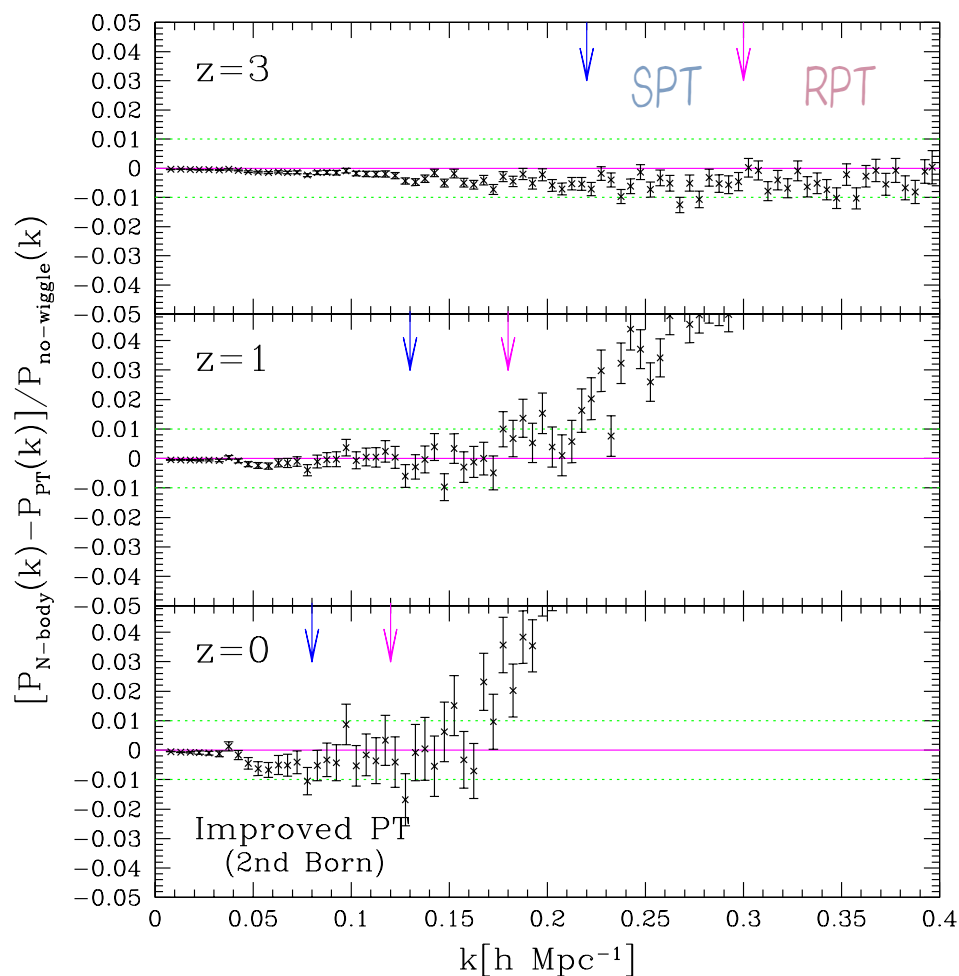


2nd order



# 摂動論とくりこみの比較

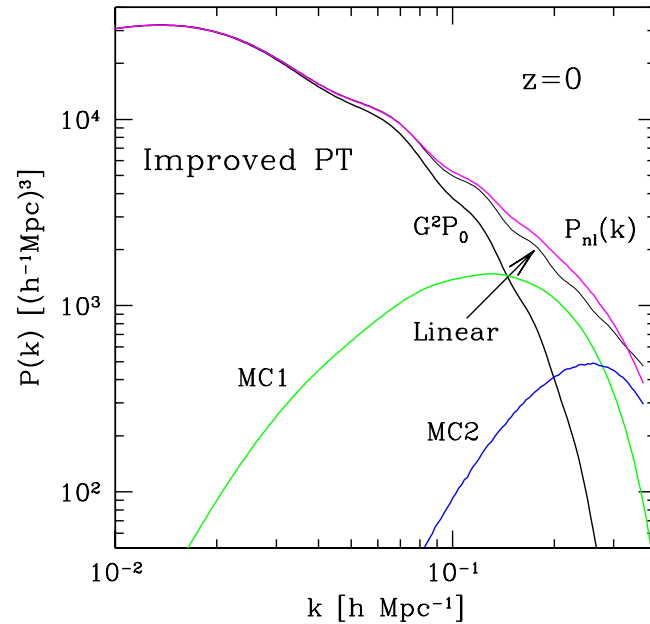
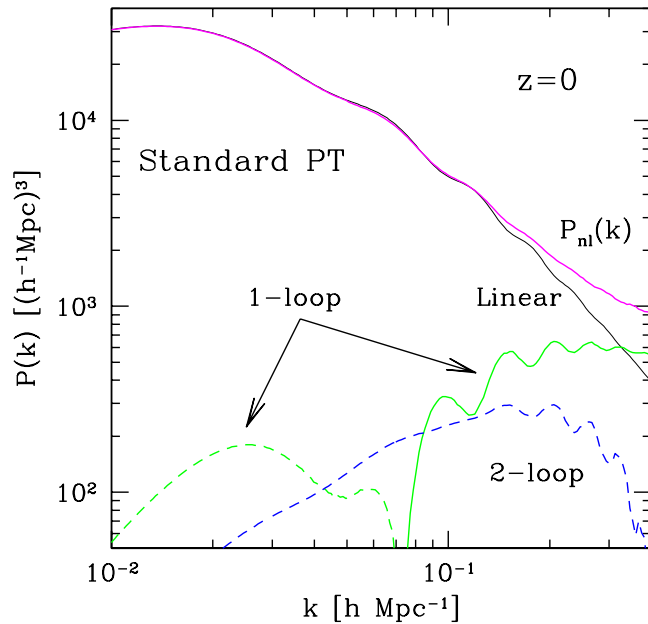
## N体シミュレーションとの比較



↓ : シミュレーションと  
1%以内で一致する  
上限を示す。

# RPTの方がN体に良く合う理由

パーツごとの寄与が良い!



全部正の寄与、the higher order, the higher k

# 大規模構造を予言するための3つの近似方法

1. 線形近似 → 計算簡単だけどダメ
2. 摂動論 (SPT) → まあまあ
3. くりこみ (RPT) → 計算が大変だがすごく良い

くりこみの方法ですごく良く予言できる!

→ でもとりあえずやってみて上手くいった系なのでもうちょっと妥当な理由がほしい。

# 参考文献

- F. Bernardeau et al, Physics Reports, Vol. 367, Issue 1-3, p.1-248 (2002)  
…摂動論の基本が一通りわかるレビュー。誤植に注意。
- M. Clocce & R. Scoccimarro, Phys. Rev. D73, 063519 (2006)  
…非摂動論的くりこみのことがわかるようになる論文。
- A. Taruya et al., Phys. Rev. D82, 063522 (2009)  
…Closure近似を用いて $P(k)$ を計算する方法がわかるようになる論文。