クインテッセンス

立教大学理学研究科物理学専攻

修士１年　舟田　成登

ダークエネルギー…宇宙を加速させる原因となる一般化された流体成分のこと。宇宙のエネルギーの半分以上を占めている。主なダークエネルギーには宇宙項とクインテッセンスがある。宇宙項は時間と空間に依らない。静的なダークエネルギー。クインテッセンスは時間と空間に依って変化する動的なダークエネルギー。

　クインテッセンスはわずかに時間変化するスカラー場のダークエネルギーである。ラグランジアンは

$$\mathrm{L} = -\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \mathrm{V}(\phi) = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \mathrm{V}(\phi) \tag{1}$$

となり、この系の作用は

$$\mathrm{S} = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{16\pi G}R + L\right] + S_m \tag{2}$$

であり、S について g とφについて変分をとると、

$$\delta S = \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}\left\{\int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{16\pi G}R + L\right] + S_m\right\}\delta g^{\mu\nu} + \int\left\{\frac{\delta L\sqrt{-g}}{\delta\phi}\delta\phi + \frac{\delta L\sqrt{-g}}{\delta\dot{\phi}}\delta\dot{\phi}\right\}d^4x \tag{3}$$

となり、

$$\delta S = \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}\frac{1}{16\pi G}\int\{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - 8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\left(L\sqrt{-g}\right)}{\delta g^{\mu\nu}})\}d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} + \int\{\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\frac{\delta L\sqrt{-g}}{\delta\left(\partial_\mu\phi\right)} - \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta L\sqrt{-g}}{\delta\phi}\}\sqrt{-g}\delta\phi d^4x \tag{4}$$

より、

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=8\pi G(T_{\mu\nu}-\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(L\sqrt{-g})}{\delta g^{\mu\nu}}) \tag{5}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\frac{\delta L\sqrt{-g}}{\delta(\partial_\mu\phi)}-\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta L\sqrt{-g}}{\delta\phi}=0 \tag{6}$$

(6)式に(1)式のラグランジアンを代入すると

$$-\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\,\partial^\mu\phi\right)+\frac{dV(\phi)}{d\phi}=0 \tag{7}$$

となり、ここで曲率が 0 のロバートソンウォーカー計量の場合を考えると、まず計量は

$$ds^2=-c^2dt^2+a(t)^2\gamma_{ij}dx^idx^j \tag{8}$$

より、$\sqrt{-g}=a^3$　、$g^{tt}=-1$　　なので(7)式は

$$-\frac{1}{a^3}\partial_t(g^{tt}a^3\,\partial_t\phi)+\frac{dV(\phi)}{d\phi}=\ddot{\phi}+3H+\frac{dV(\phi)}{d\phi}=0 \tag{9}$$

ここで、(5)式の右辺の第二項をクインテッセンスのエネルギー運動量テンソルとして

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(L\sqrt{-g})}{\delta g^{\mu\nu}} \tag{10}$$

とし、$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$を使うと

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} = \partial_\mu\phi\,\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}(\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\,\partial_\alpha\phi\,\partial_\beta\phi + V(\phi)) \tag{11}$$

(11)式よりエネルギー密度ρ_ϕと圧力p_ϕが

$$\rho_\phi = -T_0^{0(\phi)} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \tag{12}$$

$$p_\phi = \frac{1}{3}T_i^{i(\phi)} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \tag{13}$$

で表わされる。ここでダークエネルギーのエネルギー密度ρと圧力 p の状態方程式が

$$p = \omega\rho \tag{14}$$

で表わされることを使うと、ω は

$$\omega = \frac{\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\dot{\phi}^2 + V(\phi)} \tag{15}$$

となり、$\dot{\phi} = 0$ で $\omega = -1$ となり宇宙項と一致する。

曲率 0 の時空のアインシュタイン方程式は($\rho_\phi \gg \rho_M$、$p_\phi \gg p_M$のとき)

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_\phi = \frac{8\pi G}{3}\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\right] \tag{16}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho_\phi + 3p_\phi\right) = -\frac{4\pi G}{3}\left[2\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)\right] \tag{17}$$

より、(16)式-(17)式をすると

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \dot{H} = -4\pi G\dot{\phi}^2 \tag{18}$$

から

$$\phi = \int \left[-\frac{\dot{H}}{4\pi G} \right]^{1/2} dt \tag{19}$$

となり、また(17)式について$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \dot{H} + H^2$と(18)式より

$$\dot{H} + H^2 = \frac{2}{3}\dot{H} + \frac{8\pi G}{3} V(\phi) \tag{20}$$

から

$$V(\phi) = \frac{3}{8\pi G}\left(H^2 + \frac{1}{3}\dot{H}\right) \tag{21}$$

例えば、今宇宙のスケール因子が時間に比例するとしたら、

$$a(t) \propto t^p$$

となるので、そのときのϕと$V(\phi)$を求めていく。

まずハッブルパラメーターH は

$$H=\frac{\dot{a}}{a}=\frac{p}{t} \tag{22}$$

$$\dot{H}=\frac{p(p-1)}{t^2}-\frac{p^2}{t^2}=-\frac{p}{t^2} \tag{23}$$

ここで、$m_{pl}=\frac{1}{\sqrt{8\pi G}}$として、$V(\phi)$を計算すると

$$V(\phi)=\frac{3}{m_{pl}^2}\left(H^2+\frac{\dot{H}}{2}\right)=\frac{3}{m_{pl}^2}\left(\frac{p\left(p-\frac{1}{2}\right)}{t^2}\right) \tag{24}$$

また、ϕ について

$$\phi=\int dt\frac{m_{pl}\sqrt{2p}}{t}=m_{pl}\sqrt{2p}\log(t)$$ より

$$t=\exp\left(\frac{\phi}{m_{pl}\sqrt{2p}}\right) \tag{25}$$

これを(24)式に代入すると、

$$V(\phi) = \frac{3p\left(p-\frac{1}{2}\right)}{m_{pl}^2}\exp\left(-\sqrt{\frac{2}{p}}\frac{\phi}{m_{pl}}\right) = V_0\exp\left(-\sqrt{\frac{2}{p}}\frac{\phi}{m_{pl}}\right) \tag{26}$$

という形になり$V(\phi)$は exponential の関数になっている。

このとき、ϕ は時間について log スケールで変化していくことを示している。