2012年度 第42回天文・天体物理若手 夏の学校 収録

スカラーテンソル理論における ヴァインシュタイン機構

Phys. Rev. **D85**, 044059 (2012).

平成24年 8月 7日

東京理科大学大学院 理学研究科
物理学専攻 辻川研究室

博士課程一年

加瀬　竜太郎

概要

「宇宙の後期加速膨張の発見」という功績により，S. Perlmutter，B. Schmidt，A. Riess らが 2011 年度ノーベル物理学賞を受賞したことは記憶に新しい [1]．この後期加速膨張の起源の解明は，現在の宇宙論において最も重要な課題の一つになっている．一般相対論の枠組みにおける後期加速膨張は，物質源として未知の「暗黒」成分を取り入れることで実現する．この成分を暗黒エネルギーと呼ぶ．その最も単純な候補は宇宙項であり，これを基にした Λ-CDM モデルは観測との良い整合性を持つ一方で，素粒子物理学において現れる真空のエネルギーが宇宙項の起源だと考えると，理論的に予測されるエネルギー密度が観測値に比べて極端に大きすぎるという重大な問題が生じる [2]．

宇宙項が暗黒エネルギーの起源でないとすると，大別して二通りの別の候補が考えられている．一つは時間変化しない宇宙項に対して，動力学的な場を考える理論である．そのようなモデルとしてはクインテッセンス [3] が挙げられるが，今日の加速膨張を説明するためにはスカラー場について極端に小さな質量 ($m_\phi \simeq 10^{-33}\,\mathrm{eV}$) が要求され，これもまた素粒子物理学の枠組みと適合させるのが一般的に難しいという問題がある [4]．二つ目は修正重力理論と呼ばれ，大スケールにおいて重力理論が修正される可能性を考えるものであり，現在の宇宙加速膨張を説明する有力な候補として活発に研究されている．

この枠組みでは，大スケールにおいて重力理論の修正により安定な後期加速膨張が実現されなければならない一方で，局所重力実験が一般相対論とよく一致していることから，小スケールにおいては一般相対論的な振る舞いを取り戻すことが要求される．修正重力理論の例としては，f(R) 重力理論 [5]，スカラーテンソル理論 [6]，Dvali-Gabadadze-Porrati (DGP) ブレーンワールド [7]，ガリレオン重力理論 [8, 9] 等がある．最初の二つのモデルはスカラー場のポテンシャルを考えるものであり，後の二つは場の運動項によって加速膨張が引き起こされるモデルとなっている．f(R) 重力理論，及びスカラーテンソル理論においては局所領域でスカラー場が実効的に大きな質量を得るというカメレオン機構 [10] により第五の力の伝播が抑制され，局所重力実験と整合性を持つことができる．しかしながら，これらのモデルが上手く働くためには初期条件に関するファインチューニングが必要になってしまうという問題がある [11]．他方，DGP モデルにおいては，ブレーンを起源とするスカラー場の非線形な自己相互作用項 $\Box\phi(\nabla\phi)^2$ から引き起こされるヴァインシュタイン機構 [12] により，ヴァインシュタイン半径 r_V と呼ばれるスケールの内側で第五の力の伝播が抑制される．これによって DGP モデルは局所重力実験との整合性を持つことができるのだが，このモデル自身はゴーストや，Ia 型超新星 (SN Ia) とバリオン音響振動 (BAO) に関する観測の複合解析との一致の困難という問題に苛まれている [13]．そこで我々はこのヴァインシュタイン機構に着目し，一般化したラグランジアンのもと，どのようにこの機構が働くのかを研究した．

一般的な二次のスカラーテンソル理論におけるヴァインシュタイン機構を研究するため，作用としては様々なモデルを内包する Horndeski のラグランジアン [14] を出発点にした．このラグランジアンは $\mathcal{L}_2 \equiv P(\phi, X)$, $\mathcal{L}_3 \equiv G(\phi, X)\Box\phi$, $\mathcal{L}_4 \equiv G_4(\phi, X)R + G_{4,X} \times (\text{field derivatives})$, $\mathcal{L}_5 \equiv G_5(\phi, X)G_{\mu\nu}(\nabla^\mu\nabla^\nu\phi) + (G_{5,X}/6) \times (\text{field derivatives})$ という形をとる．DGP モデルにおいてヴァインシュタイン機構を生み出したスカラー場の非線形な自己相互作用項は，Horndeski のラグランジアンにおいては $\mathcal{L}_3$ に対応している．よって，この項の効果から一般的にどのようにヴァインシュタイン機構が働くのかを示すため，$\mathcal{L}_4, \mathcal{L}_5$ については

$G_4(\phi, X) \equiv F(\phi)/2$, $G_5(\phi, X) = 0$ とおいた．この場合 $\mathcal{L}_4 = F(\phi, X)R/2$ と書くことができ，これは $F = M_{\rm pl}^2$ の時にアインシュタイン・ヒルベルト項に帰着する． 我々の解析は拡張ガリレオン重力理論，ディラトン重力理論，及び場の非線形な相互作用を伴うブランス・ディッケ理論といった幅広い重力理論を包括している．このラグランジアンのもと，物質場の存在する球対称時空において完全な運動方程式を導き，弱い重力場の近似を用いてスカラー場 ϕ 及び重力ポテンシャル Ψ の閉じた方程式を導いた．そして，一般相対論的振る舞いを回復する条件より $F(\phi) = M_{\rm pl}^2 e^{-2Q\phi/M_{\rm pl}}$ という非最小結合が存在する場合について，ヴァインシュタイン半径に関する一般式を導いた．$Q \neq 0$ においては，ヴァインシュタイン半径の外側で重力ポテンシャルが大幅に修正される一方で，内側においては一般相対論からのずれが抑制されることが分かった．またこの場合，球対称時空の中心において特異点は現れない．我々はヴァインシュタイン半径内部における重力ポテンシャルの解析解から，ポストニュートニアンパラメータ γ の観測的な制限を満たす条件を導いた．また一方で $Q = 0$ においては，太陽系スケールにおいて重力ポテンシャルの修正が抑制される場合と，原点で特異点が現れ理論が有効でなくなる場合とが存在することを示した．我々はこれらの結果を extended Galileon モデルと ディラトン結合の存在する Brans-Dicke モデルに適用し，局所重力実験からの制限に対する整合性を確かめた [15]．

1　球対称背景時空における場の方程式

次のような作用から始める．

$$S=\int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}F(\phi)\,R+P(\phi,X)-G(\phi,X)\Box\phi\right]+S_m(g_{\mu\nu},\Psi_m)\,, \tag{1}$$

ここで，g は計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の行列式を，R はリッチスカラーを，$F(\phi)$ はスカラー場 ϕ の関数を，$P(\phi,X)$ や $G(\phi,X)$ は ϕ 及び $X=-g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi/2$ に関する関数を，そして S_m は物質場の作用をそれぞれ表す．物質場 Ψ_m は，スカラー場 ϕ と直接は結合していないと仮定する．

球対称背景時空のもと，運動方程式を導いていく．線素は，

$$ds^2=-e^{2\Psi(r)}dt^2+e^{2\Phi(r)}dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\phi^2)\,, \tag{2}$$

ここで， $\Psi(r)$ と $\Phi(r)$ は中心からの距離 r の関数となっている． 物質場の作用 S_m に関しては，エネルギー運動量テンソルが $T^\mu_\nu=\mathrm{diag}\,(-\rho_m,P_m,P_m,P_m)$ となる完全流体を考える．作用 (1) から導かれる運動方程式の (00), (11), (22) 成分は各々，次のようになる．

$$\begin{aligned}&\left(\frac{2F}{r}+F'-2\phi'XG_{,X}\right)\Phi'+\frac{F}{r^2}\left(e^{2\Phi}-1\right)-F''-\frac{2F'}{r}+\phi'^2G_{,\phi}+2\phi''XG_{,X}\\&\qquad\qquad=e^{2\Phi}(\rho_m-P)\,,\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}&\left(\frac{2F}{r}+F'-2\phi'XG_{,X}\right)\Psi'-\frac{F}{r^2}\left(e^{2\Phi}-1\right)+\frac{2F'}{r}+\phi'^2G_{,\phi}-\frac{4}{r}\phi'XG_{,X}\\&\qquad\qquad=e^{2\Phi}(P_m+P-2XP_{,X})\,,\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}&F\left[\Psi''+\left(\frac{1}{r}+\frac{F'}{F}\right)(\Psi'-\Phi')+\Psi'^2-\Psi'\Phi'\right]+F''+\frac{F'}{r}-\phi'^2G_{,\phi}\\&\qquad\qquad-2(\phi''-\Phi'\phi')XG_{,X}=e^{2\Phi}(P_m+P)\,,\end{aligned} \tag{5}$$

ここで $X=-e^{-2\Phi}\phi'^2/2$，プライムは r に関する微分を，そしてカンマは ϕ 又は X に関する偏微分 (e.g., $G_{,\phi}=\partial G/\partial\phi$) を表す．スカラー場 ϕ に関する運動方程式は，

$$\begin{aligned}&\phi''\left[P_{,X}+2XP_{,XX}-2(G_{,\phi}+XG_{,\phi X})-2e^{-2\Phi}\phi'(G_{,X}+XG_{,XX})\left(\frac{2}{r}+\Psi'\right)\right]\\&+e^{2\Phi}P_{,\phi}+\phi'\left[P_{,X}\left(\frac{2}{r}+\Psi'-\Phi'\right)+\phi'P_{,\phi X}-2\Phi'XP_{,XX}\right]\\&+F_{,\phi}\left[\frac{e^{2\Phi}-1}{r^2}-\Psi''-\frac{2}{r}(\Psi'-\Phi')+\Psi'\Phi'-\Psi'^2\right]\\&+2XG_{,X}\left(\frac{2}{r^2}-3\Psi'\Phi'+\Psi'^2+\Psi''-\frac{6}{r}\Phi'+\frac{4}{r}\Psi'\right)-4X^2G_{,XX}\Phi'\left(\frac{2}{r}+\Psi'\right)\\&-2\phi'G_{,\phi}\left(\frac{2}{r}+\Psi'-\Phi'\right)-\phi'^2G_{,\phi\phi}+2\phi'XG_{,\phi X}\left(\frac{2}{r}+\Psi'+\Phi'\right)=0\,.\end{aligned} \tag{6}$$

物質流体に関する連続方程式は，

$$P_m'+\Psi'(\rho_m+P_m)=0\,. \tag{7}$$

この方程式は，式 (3)-(6) を組み合わせて導くこともできる．

以降，我々は $|\Phi| \ll 1$ かつ $|\Psi| \ll 1$ で特徴付けられるような弱い重力場を考える．すると，式 (3) において支配的な寄与となる項は $(F/r^2)\Phi$ のオーダーとなる．式 (3) と (4) の各項と F/r^2 とを比較するために，次のような量を定義する．

$$
\begin{aligned}
&\epsilon_{F\phi} \equiv \frac{F_{,\phi}\phi' r}{F}\,, \qquad \epsilon_{GX} \equiv \frac{e^{-2\Phi}G_{,X}\phi'^3 r}{F}\,, \qquad \epsilon_{G\phi} \equiv \frac{G_{,\phi}\phi'^2 r^2}{F}\,, \qquad \epsilon_{P} \equiv \frac{e^{2\Phi}P r^2}{F}\,,\\
&\epsilon_{PX} \equiv \frac{P_{,X}\phi'^2 r^2}{F}\,, \qquad \epsilon_{P\phi} \equiv \frac{e^{2\Phi}P_{,\phi}\phi' r^3}{F}\,, \qquad \epsilon_{Pm} \equiv \frac{e^{2\Phi}P_m r^2}{F}\,,
\end{aligned} \tag{8}
$$

そして，

$$
\begin{aligned}
&\lambda_{F\phi\phi} \equiv \frac{F_{,\phi\phi}\phi' r}{F_{,\phi}}\,, \qquad \lambda_{PX} \equiv \frac{XP_{,XX}}{P_{,X}}\,, \qquad \lambda_{PX\phi} \equiv \frac{P_{,X\phi}\phi' r}{P_{,X}}\,,\\
&\lambda_{GXX} \equiv \frac{XG_{,XX}}{G_{,X}}\,, \qquad \lambda_{G\phi X} \equiv \frac{XG_{,\phi X}}{G_{,\phi}}\,, \qquad \lambda_{G\phi\phi} \equiv \frac{G_{,\phi\phi}\phi' r}{G_{,\phi}}.
\end{aligned} \tag{9}
$$

物質場のエネルギー密度 ρ_m は $(F/r^2)\Phi$ のオーダーである．連続方程式 (7) より，弱い重力場においては $P_m/\rho_m \sim \Psi$ となり，ここから $\epsilon_{Pm} \sim \Psi^2$ となることが分かる．以降，式 (8) の各量は全て 1 よりも小さいという近似を用いることにする．また，局所重力実験との整合性から，これらの量は大きくとも Φ と Ψ 程度のオーダーであることを要求する．

方程式 (3) と (4) を用いると，Φ' 及び Ψ' を ρ_m，Φ，そして場 ϕ 及びその微分項で表すことができる．これらの関係式を方程式 (5) に代入し，二次の項 ϵ_i^2 を ϵ_i と比べて無視することにより，次の式を得る．

$$
\Box\Psi = \mu_1\rho_m + \mu_2\Box\phi + \mu_3\,, \tag{10}
$$

ここで $\Box \equiv \dfrac{d^2}{dr^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{d}{dr}$，そして，

$$
\begin{aligned}
\mu_1 &\simeq \frac{e^{2\Phi}}{4F}\left(e^{2\Phi} + 1 - e^{2\Phi}\epsilon_{F\phi} - e^{2\Phi}\epsilon_{GX} - \epsilon_{G\phi} + \epsilon_P + \epsilon_{PX} + \epsilon_{Pm}\right)\,, &(11)\\
\mu_2 &\simeq -\frac{(3-e^{2\Phi})(\epsilon_{F\phi}+\epsilon_{GX})}{4\phi' r}\,, &(12)\\
\mu_3 &\simeq -\frac{1-2e^{2\Phi}+e^{4\Phi}}{2r^2} + \frac{(3-e^{2\Phi})(\lambda_{F\phi\phi}\epsilon_{F\phi} - 3\epsilon_{Pm})}{4r^2}\\
&\quad -\frac{4(e^{2\Phi}-2)\epsilon_P - (5-3e^{2\Phi})\epsilon_{PX} + 2(1-e^{2\Phi})(e^{2\Phi}\epsilon_{F\phi} + e^{2\Phi}\epsilon_{GX} + \epsilon_{G\phi})}{4r^2}. &(13)
\end{aligned}
$$

更に，重力ポテンシャル Φ に関して展開し，支配的な寄与を及ぼす項のみを抽出すると，

$$
\begin{aligned}
\mu_1 &\simeq \frac{1}{4F}\left(2 + 6\Phi - \epsilon_{F\phi} - \epsilon_{GX} - \epsilon_{G\phi} + \epsilon_P + \epsilon_{PX} + \epsilon_{Pm}\right)\,, &(14)\\
\mu_2 &\simeq -\frac{\epsilon_{F\phi}+\epsilon_{GX}}{2\phi' r} = -\frac{F_{,\phi}}{2F} + \frac{XG_{,X}}{F}\,, &(15)\\
\mu_3 &\simeq -\frac{4\Phi^2 + \lambda_{F\phi\phi}\epsilon_{F\phi} - 2\epsilon_P - \epsilon_{PX} - 3\epsilon_{Pm}}{2r^2}\,. &(16)
\end{aligned}
$$

$\{|\Phi|, |\epsilon_i|\} \ll 1$ であるから，方程式 (14) は $\mu_1 \simeq 1/(2F)$ のように近似される．一般相対論 (以降，GR と呼ぶ) においては，$F = M_{\rm pl}^2 = 1/(8\pi G_N)$ (G_N はニュートン重力定数) とな

るため，$\mu_1 = 4\pi G_N$ を得る．$\mu_2 \neq 0$ である時，スカラー場のラプラシアン項 $\Box\phi$ によって重力定数は修正を受ける．これは場の方程式 (6) について式 (3) を用いて Φ' を消去した際，物質のエネルギー密度 ρ_m の項が含まれることから来ている．方程式 (15) は次の条件で特徴付けられる理論において，重力定数が修正されることを示唆している．

$$F_{,\phi} \neq 0\,, \quad \text{or} \quad G_{,X} \neq 0\,. \tag{17}$$

式 (10) の右辺は Φ/r^2 のオーダーである．$|\mu_2\phi'/r| \gg |\mu_3|$ という条件が満たされるとすると，方程式 (10) の右辺第三項目は第二項目に比べて無視することができる．これは，$\{|\epsilon_{F\phi}|, |\epsilon_{GX}|\} \gg \{\Phi^2, |\lambda_{F\phi\phi}\epsilon_{F\phi}|, |\epsilon_P|, |\epsilon_{PX}|, |\epsilon_{Pm}|\}$ という条件に対応する．

方程式 (6) と (3)-(5) とを連立することで，ϕ に関しての閉じた方程式を導くことができる．支配的な寄与を及ぼす項を抽出すると，

$$\Box\phi = \mu_4\,\rho_m + \mu_5\,, \tag{18}$$

ここで，

$$\begin{aligned}
\mu_4 &\simeq \frac{\phi' r e^{2\Phi}(\alpha + \epsilon_{GX} + \epsilon_{F\phi})}{2F\alpha}\,, && (19)\\
\mu_5 &\simeq -\phi'\{[2e^{2\Phi}(1-\lambda_{GXX}) + (e^{4\Phi}-15)(1+\lambda_{GXX})]\epsilon_{GX} + 2(2e^{2\Phi} - 8\lambda_{G\phi X} + \lambda_{G\phi\phi} - 2)\epsilon_{G\phi} \\
&\quad -2(\lambda_{PX}e^{2\Phi} + \lambda_{PX\phi} + e^{2\Phi} - 1 - 5\lambda_{PX})\epsilon_{PX} - 2\epsilon_{P\phi}\}/(2r\alpha)\,, && (20)
\end{aligned}$$

そして，

$$\alpha \equiv (1+\lambda_{GXX})(e^{2\Phi}+3)\epsilon_{GX} + 2(1+\lambda_{G\phi X})\epsilon_{G\phi} - (1+2\lambda_{PX})\epsilon_{PX}\,. \tag{21}$$

である．$e^{2\Phi} \simeq 1$ という近似を用い，更に式 (19) と (20) について，作用の段階で用いた量で表すと，

$$\begin{aligned}
\mu_4 &\simeq -\frac{r(F_{,\phi} - \phi'\beta + \phi'^2 G_{,X})}{2F\beta}\,, && (22)\\
\mu_5 &\simeq -\frac{P_{,\phi}r^2 + 4X(2G_{,\phi X} - P_{,XX})\phi' r + [(P_{,\phi X} - G_{,\phi\phi})r^2 + 6G_{,X} + 8XG_{,XX}]\phi'^2}{r\beta}\,, && (23)
\end{aligned}$$

ここで，

$$\beta \equiv (P_{,X} + 2XP_{,XX} - 2G_{,\phi} - 2XG_{,\phi X})r - 4(G_{,X} + XG_{,XX})\phi'\,. \tag{24}$$

式 (18) を (10) に代入すると次が従う．

$$\Box\Psi = 4\pi G_{\rm eff}\rho_m + \mu_3 + \mu_2\mu_5\,, \tag{25}$$

ここで，

$$\begin{aligned}
G_{\rm eff} &\equiv \frac{1}{4\pi}(\mu_1 + \mu_2\mu_4) \\
&\simeq \frac{1}{8\pi F}\biggl[1 + \left(\frac{F_{,\phi}}{2F} - \frac{XG_{,X}}{F}\right)\frac{r(F_{,\phi} - \phi'\beta + \phi'^2 G_{,X})}{\beta} \\
&\qquad + 3\Phi - \frac{1}{2}(\epsilon_{F\phi} + \epsilon_{GX} + \epsilon_{G\phi} - \epsilon_P - \epsilon_{PX} - \epsilon_{Pm})\biggr]\,. && (26)
\end{aligned}$$

方程式 (25) は修正ポアソン方程式に相当する．式 (26) の右辺第二項目は重力がどの程度修正されるのかを計算する上で極めて重要となる．$P = X$ かつ $G = 0$ である理論において，この第二項目は $F_{,\phi}^2/(2F)$ のオーダーで寄与する．$F = M_{\rm pl}^2 e^{-2Q\phi/M_{\rm pl}}$ という形のディラトン結合が存在する場合 (ここで Q はオーダー 1 の定数であり $M_{\rm pl}$ は換算プランク質量)，この寄与は $|\phi/M_{\rm pl}| \ll 1$ において $2Q^2$ に落ちるため，重力結合定数は GR の場合と比べて大幅に修正される．この場合のモデルは局所重力実験と矛盾するが，$G(\phi, X)$ という項が存在すると状況は変わってくる．次節ではいかにしてこの項の効果が現れるのかを見ていく．

2　ヴァインシュタイン機構

非線形な場の自己相互作用項 $G(\phi, X)\Box\phi$ が存在する場合における，ヴァインシュタイン機構について考える．その上で，どこかの時点で $G(\phi, X)$ 等の関数型を決定する必要があるのだが，幅広いスカラーテンソル理論を内包できるよう，可能な限りは一般形で解析を続けることにする．

まず最初にリッチスカラー R と非最小結合した関数 $F(\phi)$ の形に関して考えよう．これがベキ関数の形 $F(\phi) \propto \phi^p$ である場合，パラメータ $\epsilon_{F\phi}$ は $\epsilon_{F\phi} = p\phi' r/\phi$ という形に落ちる．この時 $\phi \propto r^q$ という形の解が存在する場合，$\epsilon_{F\phi} = pq$ となり，$|\epsilon_{F\phi}| \ll 1$ という近似は p と q が 1 のオーダーの際に崩れてしまう．

例えば，$F(\phi) = \phi$ (i.e. $p = 1$) かつ $P = \omega_{\rm BD}X/\phi$ で特徴付けられるブランス・ディッケ理論 [16] において，X に依存する項 $G(X)$ が存在する場合を考えよう．$|P_{,X}r| \gg |4(G_{,X} + XG_{,XX})\phi'|$ という条件で特徴付けられる大スケールにおいて，式 (24) における項 β は $\beta \simeq \omega_{\rm BD}r/\phi$ という形で与えられるため，μ_4 はベキの形の解 $\phi \propto r^q$ の場合には定数となる．実際，すぐ後に見るように μ_4 が定数である時，$\phi \propto r^{-1}$ という解が存在する．$|P_{,X}r| \gg |4(G_{,X} + XG_{,XX})\phi'|$ となる領域において，場の方程式 (18) は近似的に次のように与えられる．

$$\frac{d}{dr}(r^2\phi') \simeq \mu_4 \rho_m r^2\,. \tag{27}$$

ここで質量源のシュヴァルツシルト半径 r_g を次のように導入する．

$$r_g \equiv \frac{1}{M_{\rm pl}^2}\int_0^r \rho_m \tilde{r}^2 d\tilde{r}\,, \tag{28}$$

ここから，$\rho_m r^2 = M_{\rm pl}^2\, dr_g/dr$ といった関係式を得る．すると，式 (27) を積分して次のような解を得る．

$$\phi'(r) \simeq \frac{\mu_4 M_{\rm pl}^2 r_g}{r^2}\,. \tag{29}$$

関数 r_g がほぼ定数となるような (すなわち，$\rho_m r^2 \to 0$ となるような) 半径 r について，$\phi'(r) \propto r^{-2}$ より $\epsilon_{F\phi} = -1$ が成り立つ． よって 1 節で用いた近似は非最小結合 $F(\phi) = \phi$ の場合には破綻することとなる． この問題はスカラー場 ϕ を指数関数型結合，すなわち $\phi \to M_{\rm pl}^2 e^{-2Q\tilde{\phi}/M_{\rm pl}}$，を用いてスケールしなおすことにより回避できる．ここで Q は定数である．この場合，スケールしなおした後のスカラー場 $\tilde{\phi}$ は低エネルギー有効弦理論におけるディラトン場と関係している [17]．後に 3.2 節で見るように，このようなスケールのしなおしを行うと，ブランス・ディッケ理論における運動項は，$Q \to 0$ の極限で通常の運動項 $P = -g^{\mu\nu}\partial\tilde{\phi}_\mu\partial\tilde{\phi}_\nu/2$ へと落ちる．$F(\phi) \propto \phi^p$ というベキ関数型結合よりも寧ろ，指数関数型結合するスカラー場 ϕ をより根本的なものとして扱おう．

$$F(\phi) = M_{\rm pl}^2 e^{-2Q\phi/M_{\rm pl}} \tag{30}$$

この場合は $\epsilon_{F\phi} = -2Q\phi' r/M_{\rm pl}$ となり，$|\epsilon_{F\phi}|$ はベキ関数型の解 $\phi'(r) \propto r^{-2}$ があったとしても 1 よりも非常に小さくなりうる．

ここから先， (30) のような結合を持つ理論に着目していく．そのうえで，(i) $Q \neq 0$ と (ii) $Q = 0$ の場合を個別に見ていくこととする．

2.1 $Q \neq 0$ の場合

Q の値が 0 ではない場合を論じるにあたり，我々は主に $|Q|$ の値が 1 のオーダーであるような理論に興味がある．この場合 式 (22) 中の $F_{,\phi}$ という項が場の方程式に重要な寄与をする，式 (22) と (23) より，解の定性的な振る舞いは次の式で特徴付けられる半径 r_V の内外において変化することを我々は発見した．

$$|B(r_V)r_V| = |4(G_{,X} + XG_{,XX})(r_V)\, \phi'(r_V)|\,, \tag{31}$$

ここで，

$$B \equiv P_{,X} + 2XP_{,XX} - 2G_{,\phi} - 2XG_{,\phi X}\,. \tag{32}$$

この r_V こそがヴァインシュタイン半径と呼ばれるものであり [12]，この半径の内側では $G(\phi, X)\Box\phi$ という項の存在により GR 的振る舞いが取り戻されることになる．

以降，次のような作用で記述される理論に着目する．

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}F(\phi)R + f(\phi)X - g(\phi)M^{1-4n}X^n\Box\phi\right] + S_m(g_{\mu\nu}, \Psi_m)\,, \tag{33}$$

ここで $F(\phi)$ は式 (30) で与えられる関数であり，また M は質量次元の定数である．この場合 $P(\phi, X) = f(\phi)X$ かつ $G(\phi, X) = g(\phi)M^{1-4n}X^n$ であり， $f(\phi), g(\phi)$ は ϕ の関数，そして n は正の整数 $(n \geq 1)$ である．$f(\phi)$ と $g(\phi)$ を緩やかに広がる，オーダー 1 程度の無次元な関数であると仮定しよう，すなわち，

$$|M_{\rm pl}f_{,\phi}/f| \lesssim 1\,, \qquad |M_{\rm pl}g_{,\phi}/g| \lesssim 1\,. \tag{34}$$

もし $f(\phi)$ と $g(\phi)$ が $F(\phi) = M_{\rm pl}^2 e^{-2Q\phi/M_{\rm pl}}$ に比例する場合，条件 (34) は $|Q| \lesssim 1$ において満たされる．

作用 (33) について場の方程式 (18) は次のようになる．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}(r^2\phi') \;=\; & \frac{r[2QF/M_{\rm pl} + \{f - 2(n+1)M^{1-4n}g_{,\phi}X^n\}\phi' r - 2n(4n+1)M^{1-4n}gX^n]}{2F[\{f - 2(n+1)M^{1-4n}g_{,\phi}X^n\}r - 4n^2M^{1-4n}gX^{n-1}\phi']}\rho_m r^2 \\ & - \frac{f_{,\phi}Xr^2 + 8nM^{1-4n}g_{,\phi}X^n\phi' r + \{(f_{,\phi} - M^{1-4n}g_{,\phi\phi}X^n)r^2 + 2n(4n-1)M^{1-4n}gX^{n-1}\}\phi'^2}{\{f - 2(n+1)M^{1-4n}g_{,\phi}X^n\}r - 4n^2M^{1-4n}gX^{n-1}\phi'}r\,.\end{aligned} \tag{35}$$

方程式 (35) の解の定性的な振る舞いは，半径 r が r_V よりも大きいか否かによって異なってくる． 更に r がある半径 r_* よりも小さい領域でも解の振る舞いは変わる．r_* は方程式 (35) において，密度に依存する初項が球対称物質まわりで二項目と同程度の寄与をもつ点の半径である．故に，三つの異なる領域 (a) $r \gg r_V$, (b) $r_* \ll r \ll r_V$，そして (c) $r \ll r_*$ が存在することになる． これから方程式 (35) の解を各々の領域において求めていく．

2.1.1 $r \gg r_V$

条件 $|F_{,\phi}| \gg |\phi'\beta|$ が領域 $r \gg r_V$ において満たされている限り，方程式 (22) 中の μ_4 の項は $\mu_4 \simeq Q/(M_{\rm pl}B)$ のように近似できる．以下で見るように，場は領域 $r \gg r_V$ において $B \simeq$ constant ならば，$\phi'(r) \simeq (QM_{\rm pl}/B)(r_g/r^2)$ のように振る舞う．この場合，条件 $|F_{,\phi}| \gg |\phi'\beta|$ は満たされることになる．(33) のような作用で記述される理論において，領域

$r \gg r_V$ では方程式 (18) の右辺のうち項 $\mu_4\rho_m$ が支配的に寄与する．これは μ_5 を取り除いて方程式 (18) の解を求めた上で，その解を方程式 (22) と (23) とに代入することで確認できる．すると，領域 $r \gg r_V$ において場の方程式 (35) 次のように近似できる．

$$\frac{d}{dr}(r^2\phi') \simeq \frac{Q}{M_{\rm pl}B}\rho_m r^2\,, \tag{36}$$

ここで $B = f - 2(n+1)M^{1-4n}g_{,\phi}X^n \simeq f$ である．$f(\phi)$ がゆるやかに変化する関数であるかぎり，B はほぼ定数となる．P が X の非線形項を含むような k-essence [18] において，一般的には B は r に依存する．$P = f(\phi)X$ という項が B の中で支配的な項だと仮定しても，B がほぼ一定という近似を使うことができる．式 (28) で定義されたシュバルツシルト半径を用いると，方程式 (36) は次のように積分される．

$$\phi'(r) \simeq \frac{QM_{\rm pl}}{B}\frac{r_g}{r^2}\,. \tag{37}$$

解 (37) が $r = r_V$ においてもおおよそ成り立つと近似すると，

$$r_V^3 \simeq \left|\frac{4QM_{\rm pl}r_g}{B(r_V)^2}(G_{,X} + XG_{,XX})(r_V)\right|\,. \tag{38}$$

関数 $G = X/M^3$ の場合には，ヴァインシュタイン半径は $r_V = |4QM_{\rm pl}r_g/(B(r_V)^2M^3)|^{1/3}$ になること．項 $G_{,X} + XG_{,XX}$ が X に依存する場合，式 (37) を再度用いて r_V の閉じた式を求める必要がある．

2.1.2 $r_* \ll r \ll r_V$

領域 $r_* \ll r \ll r_V$ においては，G に依存する項が β の中で支配的な寄与となる．解が $\phi'(r) \propto r^{-p}$ $(0 < p < 1)$ で表される限りは，$\beta \simeq -4(G_{,X} + XG_{,XX})\phi'(r)$ のように近似することができる．$G = g(\phi)M^{1-4n}X^n$ $(n \geq 1)$ という関数型の場合，後に導かれる解は $\phi'(r) \propto r^{-1/(2n)}$ のように振る舞うため上記の近似は保証される．領域 $r_* \ll r \ll r_V$ において，方程式 (23) の μ_5 の分子にある項 $(6G_{,X} + 8XG_{,XX})\phi'^2$ が場の方程式に支配的な寄与を及ぼすため，次のように近似することができる．

$$\frac{d}{dr}(r^2\phi') \simeq \frac{3G_{,X} + 4XG_{,XX}}{2(G_{,X} + XG_{,XX})}\,r\phi' = \frac{4n-1}{2n}\,r\phi'\,. \tag{39}$$

$\lambda_{GXX} = XG_{,XX}/G_{,X} = n - 1$ であるため，方程式 (39) の中にある項 $r\phi'$ の係数は関数型 $G = g(\phi)M^{1-4n}X^n$ の場合には定数となる．方程式 (39) を積分すると，

$$\phi'(r) = Cr^{-1/(2n)}\,. \tag{40}$$

係数 C は二つの解 (37) と (40) とを $r = r_V$ においてマッチングすることによりおおよそ知ることができ，$C = QM_{\rm pl}r_g r_V^{1/(2n)-2}/B(r_V)$ となる．すると式 (40) は次の形に落ちる．

$$\phi'(r) \simeq \frac{QM_{\rm pl}r_g}{B(r_V)r_V^2}\left(\frac{r}{r_V}\right)^{-1/(2n)}\,. \tag{41}$$

解 (37) と比べると，領域 $r_* \ll r \ll r_V$ において場の微分項はよりゆっくりと変化することが分かる．これがヴァインシュタイン機構の働いている領域である．解 (41) は方程式 (39) において我々が用いた近似，例えば $|g_{,\phi}g^{-1}\phi' r| \ll 1$，と矛盾しない．

解 (41) は，極限 $r \to 0$ において発散する．この発散を回避するためには，$\phi'(r)$ が r_* よりも小さい領域で異なった振る舞いをすることが望まれる．我々が用いた近似が，その内側で崩れるような領域の半径 r_ϵ を求めるために，式 (8) で定義した量を計算してみよう:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{F\phi} &\simeq -\frac{2Q^2}{B(r_V)}\frac{r_g}{r_V}\left(\frac{r}{r_V}\right)^{1-1/(2n)}, \qquad |\epsilon_{GX}| \simeq \frac{M_{\rm pl}^2}{8nF(\phi)}\frac{r_g}{r}|\epsilon_{F\phi}|, \\
\epsilon_{G\phi}| &\simeq \frac{|Q^3\eta_g(\phi)M_{\rm pl}^2|}{8n^2B(r_V)^2F(\phi)}\left(\frac{r_g}{r_V}\right)^3\left(\frac{r}{r_V}\right)^{1-1/n}, \quad \epsilon_{PX} = -2\epsilon_P \simeq \frac{f(\phi)Q^2M_{\rm pl}^2}{B(r_V)^2F(\phi)}\left(\frac{r_g}{r_V}\right)^2\left(\frac{r}{r_V}\right)^{2-1/n}, \\
\epsilon_{P\phi} &\simeq \frac{f(\phi)\eta_f(\phi)Q^3M_{\rm pl}^2}{2B(r_V)^3F(\phi)}\left(\frac{r_g}{r_V}\right)^3\left(\frac{r}{r_V}\right)^{3-3/(2n)},
\end{aligned} \tag{42}$$

ここで $\eta_f(\phi) = M_{\rm pl}f_{,\phi}/f$， $\eta_g(\phi) = M_{\rm pl}g_{,\phi}/g$ である．$F(\phi)/M_{\rm pl}^2$ であり，かつ $f(\phi)$，$g(\phi)$ が急激に変化せずに 1 のオーダーであり続ける限り，領域 $r \ll r_V$ において式 (42) に示された量は，$|\epsilon_{GX}|$ を除き，1 よりもずっと小さくなる．変数 ϵ_{GX} は $r^{-1/(2n)}$ に依存するため，$r \to 0$ の極限で発散してしまう．近似 $|\epsilon_{GX}| \ll 1$ は次のような半径 $r < r_\epsilon$ で破綻してしまうことになる．

$$r_\epsilon = r_V\left(\frac{M_{\rm pl}^2Q^2}{4nF(r_\epsilon)|B(r_V)|}\frac{r_g^2}{r_V^2}\right)^{2n}. \tag{43}$$

$|Q|$，$|B(r_V)|$，そして $F(r_\epsilon)/M_{\rm pl}^2$ が 1 のオーダーである場合，$r_\epsilon/r_g \approx (r_g/r_V)^{4n-1}$ を得る．これは，$n \geq 1$ かつ $r_g \ll r_V$ の場合，r_ϵ が r_g と比べても更に小さくなることを意味する．後に 3 節で見るように，暗黒エネルギーと関わるモデルでは，太陽 ($r_g \approx 10^5\,{\rm cm}$) の一般的なヴァインシュタイン半径はおよそ $r_V \approx 10^{20}\,{\rm cm}$ となる．$n = 1$ の場合，$r_\epsilon \approx 10^{-40}\,{\rm cm}$ となり，これはプランク長よりも小さい．一方で解の振る舞いが変わる一般的な半径 r_* は太陽半径程度 ($\approx 10^{10}\,{\rm cm}$) であるため，解 (41) は $r > r_*$ において信用できることになる．

2.1.3 $r \ll r_*$

球対称物体まわりにおいて，場の方程式 (35) の右辺にある密度に依存する項が重要になってくる領域での解を求めていこう．原点における解の正則性のため，境界条件は $\phi'(0) = 0$ かつ $|\phi''(0)| < \infty$ を満たさなければならない．これら二つの条件は，$r \to 0$ において $\phi'(r) \propto r^m$ ($m \geq 1$) を導く．また，密度 ρ_m について，$r \to 0$ の極限で一定値 ρ_c に近付く条件を課す．

$n = 1$，すなわち $G = g(\phi)M^{-3}$ となるような理論に関して，場の方程式 (35) は $r = 0$ まわりにおいて，

$$\frac{d}{dr}(r^2\phi') \simeq \frac{M^3Q\rho_m}{M_{\rm pl}(rM^3f_c - 4g_c\phi')}r^3 - \frac{6\phi'^2g_c}{rM^3f_c - 4g_c\phi'}r\,, \tag{44}$$

ここで，$f_c = f(\phi_c)$，$g_c = g(\phi_c)$，そして ϕ_c は原点における場の値である．$\rho_m \simeq \rho_c = {\rm constant}$ を用いると，$\phi'(r) = br$ で特徴付けられる解が存在する．係数 b は $\phi'(r) = br$ を方程式 (44) に代入することで得ることができる．すると解は，

$$\phi'(r) \simeq \frac{M^3f_c}{4g_c}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{8Q\rho_cg_c}{3M_{\rm pl}M^3f_c^2}}\right]r\,. \tag{45}$$

$|Q\rho_c g_c| \gg M_{\rm pl}M^3 f_c^2$ という条件が満たされる場合，解 (45) は近似的に，

$$\phi'(r) \simeq \pm \left(\frac{|Q|M^3\rho_c}{6M_{\rm pl}g_c}\right)^{1/2} r\,, \tag{46}$$

この解が存在するためには $Q<0$，$g_c>0$ が必要となる．解 (46) の符号は領域 $r \gg r_*$ における解とのマッチングによって決定される．$Q<0$ の時，$B(r_V)>0$，$B(r_V)<0$ の場合について符号はそれぞれ負，正となる．

星の中心まわりでの解 (46) を求めたが，これは ρ_m がほぼ一定になるような星についても使うことができる． $n=1$ の場合について，半径 r_* で二つの解 (41) と (46) とをマッチングすることにより，次が従う．

$$r_* \simeq \left(\frac{6|Qg_c|}{B^2(r_V)}\frac{r_g^2}{\rho_c r_V^3}\right)^{1/3}\frac{M_{\rm pl}}{M}\,, \tag{47}$$

ここで，式 (35) の右辺にある二つの項は同程度のオーダーになる．マッチング半径 r_* は M 及び ρ_c に依存する．後に 3 節で見るように，今日の宇宙加速膨張に関係のあるモデルにおいて，太陽の場合の半径 r_* (太陽の質量がおおよそ一定であると考えて) は一般的に太陽半径程度である .

$n>1$ の場合，境界条件 $r=0$ を満たす場の方程式は次の形に落ちる．

$$\frac{d}{dr}(r^2\phi') \simeq \frac{Q\rho_c}{M_{\rm pl}f_c}r^2\,. \tag{48}$$

積分すると，次のようになる．

$$\phi'(r) \simeq \frac{Q\rho_c}{3M_{\rm pl}f_c}r\,, \tag{49}$$

ここで，$\phi'(0)=0$ を用いた．この解を (41) とマッチングさせるために，$B(r_V)>0$ であることを要請する．

2.1.4　重力ポテンシャルの補正

領域 $r_* \ll r \ll r_V$ において，どのようにニュートン重力ポテンシャルが修正されるのかを見ていこう．まず最初に，ヴァインシュタイン機構がどのようにして式 (26) に現れる重力カップリングの補正項を抑制するのかを見ていく．領域 $r_* \ll r \ll r_V$ において $|\epsilon_{GX}| \ll |\epsilon_{F\phi}|$ となるため，項 $XG_{,X}/F$ は $F_{,\phi}/(2F)$ に対して無視することができる．解 (41) と式 (38) で定義された r_V を用いると，$|\beta| \simeq |4(G_{,X}+XG_{,XX})\phi'| \simeq |B(r_V)|r_V(r_V/r)^{1-1/(2n)}$ となる．すると式 (26) の角括弧内の二項目は次のように計算することができる．

$$\left|\left(\frac{F_{,\phi}}{2F}-\frac{XG_{,X}}{F}\right)\frac{r(F_{,\phi}-\phi'\beta+\phi'^2G_{,X})}{\beta}\right| \simeq \left|\frac{rF_{,\phi}^2}{2F\beta}\right| \simeq \frac{2Q^2}{M_{\rm pl}^2}\left|\frac{F(\phi)}{B(r_V)}\right|\left(\frac{r}{r_V}\right)^{2-1/(2n)}\,, \tag{50}$$

これは領域 $r \ll r_V$ において 1 よりもずっと小さい．β の中に項 $G(\phi,X)$ があることで，ヴァインシュタイン半径内では GR 的な振る舞いが取り戻されるのである．

式 (42) を用いて方程式 (3) 及び (4) の支配的な寄与をする項のみ抜き出すと，

$$\frac{2F}{r}\Phi' + \frac{2F}{r^2}\Phi - F'' - \frac{2F'}{r} \simeq \rho_m\,, \tag{51}$$

$$\frac{2F}{r}\Psi' - \frac{2F}{r^2}\Phi + \frac{2F'}{r} \simeq 0\,. \tag{52}$$

解 (41) を上式 (51) に代入することで，次を得る．

$$\frac{d}{dr}\left(r\Phi - \frac{r_g}{2}\right) \simeq \frac{(1-4n)Q^2 r_g}{2nB(r_V)r_V^{2-1/(2n)}} r^{1-1/(2n)}\,. \tag{53}$$

これを積分することにより，

$$\Phi \simeq \frac{r_g}{2r}\left[1 - \frac{2Q^2}{B(r_V)}\left(\frac{r}{r_V}\right)^{2-1/(2n)}\right]\,, \tag{54}$$

この解を式 (52) に代入すると，

$$\Psi \simeq -\frac{r_g}{2r}\left[1 - \frac{4n}{2n-1}\frac{Q^2}{B(r_V)}\left(\frac{r}{r_V}\right)^{2-1/(2n)}\right]\,. \tag{55}$$

式 (54) と (55) の角括弧内二項目は，明らかに $r \ll r_V$ の領域で 1 よりもずっと小さくなる．よって，第五の力は抑えられることになる．

ポストニュートニアン・パラメータ γ を次のように定義しよう．

$$\gamma \equiv -\Phi/\Psi\,. \tag{56}$$

γ には現時点で厳しい制限が課せられており，$|\gamma - 1| < 2.3 \times 10^{-5}$ となる [19]．解 (54) と (55) とを用いると，この制限は次のように翻訳できる．

$$\frac{2Q^2}{2n-1}\frac{1}{|B(r_V)|}\left(\frac{r}{r_V}\right)^{2-1/(2n)} < 2.3 \times 10^{-5}\,. \tag{57}$$

r_V よりも非常に小さい r について，(57) は $|Q| = \mathcal{O}(1)$ の場合であっても満たされる．

領域 $r \ll r_*$ において，重力ポテンシャルの補正項は式 (54) と (55) の場合よりも更に抑制されることになる．これは r が 0 に近付くと，$|\epsilon_{F\phi}|$ や $|\epsilon_{GX}|$ といった量が減少していくという事実から来ている．

2.2 $Q = 0$ の場合

作用 (33) において $F = M_{\rm pl}^2$ となる理論の場合を考えよう．$Q = 0$ の場合でも，$XG_{,X}/F$ という補正項が式 (26) の中に存在するため，そのような補正項が抑制されるか否かは自明ではない．(i) $n = 1$ と (ii) $n > 1$ の場合に分けて考えていく．

2.2.1 $n = 1$

これは関数型 $G = g(\phi)M^{-3}X$ の場合に相当する．解の定性的な振る舞いは $|f_V r_V| = |4M^{-3}g_V\phi'(r_V)|$ で特徴付けられる半径 r_V において変化する．ここで，f_V と g_V は各々 $r = r_V$ における f と g の値である．

領域 $r \gg r_V$ において，式 (18) の中では項 $\mu_4\rho_m$ が μ_5 に比べ支配的になる．ここで，$\mu_4 \simeq \phi' r/(2M_{\rm pl}^2)$ である．すると，

$$\frac{d}{dr}(r^2\phi') = \frac{\phi' r}{2}\frac{dr_g}{dr}\,. \tag{58}$$

この方程式の解は次のような形で書くことができる．

$$\phi'(r) = \frac{C}{r^2}\exp\left[\frac{1}{2M_{\rm pl}^2}\int_{r_V}^{r}\rho_m(\tilde{r})\tilde{r}d\tilde{r}\right]\,, \tag{59}$$

ここで C は積分定数である． 局所的な物質密度について，その積分 $\int^\infty \rho_m(\tilde{r})\,\tilde{r}^2 d\tilde{r}$ が有限であることを仮定する．すると r が大きい地点で，$\rho_m \simeq br^{-2-q}$ ($q > 1$，b は定数) となることが要請される．この場合，式 (59) は次のようになる．

$$\phi'(r) = \frac{C}{r^2}\exp\left[-\frac{b}{2M_{\rm pl}^2 q}(r^{-q} - r_V^{-q})\right] \simeq \frac{C_1}{r^2}\,, \tag{60}$$

ここで C_1 は指数関数を吸収させた上での定数である (指数関数は r の大きな領域でほぼ定数となる)．この関係はより弱い境界 $q > 0$ においても有効となる．

半径 r が r_V よりも小さな領域を考えよう．球対称の中心まわりにおいて，解はある半径 r_* で変化するはずである．よって我々はまず，領域 $r_* \ll r \ll r_V$ において解を導く．この領域において $\beta \simeq -4M^{-3}g\phi'$，$\mu_4 \simeq 5\phi' r/(8M_{\rm pl}^2)$，そして $\mu_5 \simeq 3\phi'/(2r)$ であるから場の方程式は，

$$\frac{d}{dr}(r^2\phi') = \phi' r\left(\frac{5}{8}\frac{dr_g}{dr} + \frac{3}{2}\right)\,. \tag{61}$$

条件 $|dr_g/dr| \ll 1$ (これは r の大きな領域で $\rho_m r^2 \to 0$ となることに対応する) のもとでは，近似解が存在し，

$$\phi'(r) \simeq \frac{C_2}{\sqrt{r}}\,, \tag{62}$$

ここで C_2 は積分定数である．この解 (62) は $r \to 0$ の極限で用いることはできない．

最後に領域 $r \ll r_*$ における解の振る舞いを見ておこう．原点における解の正則性のために，場の微分項は $\phi'(r) \propto r^m$ ($m \geq 1$) という形をとらなければならない． この領域においては $\rho_m = \rho_c + \mathcal{O}(r^2)$ であるから，場の方程式 (35) は次のように近似される．

$$\frac{d}{dr}(r^2\phi') \simeq \frac{6M^{-3}g_c\phi'^2 r}{4M^{-3}g_c\phi' - f_c r}\,, \tag{63}$$

解の形として $\phi' = b\,r$ を想定し，式 (63) に代入すると次の解を得る．

$$\phi'(r) \simeq \frac{f_c}{2g_c}M^3 r\,. \tag{64}$$

$r = r_*$ において，二つの解 (64) と (62) のマッチングを行おう．ただし，$r = r_*$ において ρ_m が ρ_c からずれる場合には，解 (64) に関する補正を考える必要がある．マッチングを行うと $C_2 = f_c/(2g_c)\, M^3\, r_*^{3/2}$ であることが分かり，領域 $r_g < r \ll r_V$ における解は，

$$\phi'(r) \simeq \frac{f_c}{2g_c} M^3 r_* \left(\frac{r_*}{r}\right)^{1/2} . \tag{65}$$

最後に $r \simeq r_V$ において，二つの解 (65) と (60) のマッチングを行うと，領域 $r \gg r_V$ において解は次のようになることが分かる．

$$\phi'(r) \simeq \frac{f_c}{2g_c} M^3 r_* \left(\frac{r_*}{r_V}\right)^{1/2} \left(\frac{r_V}{r}\right)^2 . \tag{66}$$

ヴァインシュタイン半径 r_V は条件 $|f_V r_V| \simeq |4M^{-3} g_V \phi'(r_V)|$ によって定義される．ここから，

$$r_V \simeq \left|\frac{2f_c\, g_V}{f_V\, g_c}\right|^{2/3} r_* . \tag{67}$$

$|f|$ と $|g|$ がオーダー 1 の場合，上式 (67) は r_V が r_* と同じオーダーであることを示唆している．これは解 (65) で特徴付けられる中間領域 $r_* < r < r_V$ が存在しないことを意味する．更にマッチング半径 r_V は完全に決定することができない．

解 (64) で特徴付けられる領域 $r < r_V$ を考えよう．すると実効重力定数 (26) の角括弧内二項目は次のように近似して計算することができる．

$$\xi \equiv \left| \left(\frac{F_{,\phi}}{2F} - \frac{XG_{,X}}{F}\right) \frac{r(F_{,\phi} - \phi'\beta + \phi'^2 G_{,X})}{\beta} \right| \approx |\epsilon_{GX}| \approx \frac{M^6 r^4}{M_{\rm pl}^2} . \tag{68}$$

このモデルが宇宙の後期加速膨張と関係する場合，質量 M は $M^3 \approx M_{\rm pl} H_0^2$ といった形で今日のハッブルパラメータ H_0 と関係する [20, 21]．この関係を用いると，$\xi \approx (r/H_0^{-1})^4$ となる．これは太陽系スケールにおいては補正項が著しく抑制されることを意味する．式 (3) 及び (4) 中にある，関数 G に依存する項はそれぞれ $(F/r^2)\epsilon_{GX}$ と $(F/r^2)\epsilon_{G\phi}$ のオーダーである．領域 $r < r_V$ において，$|\epsilon_{G\phi}| \approx (r/H_0^{-1})^6$ となるため，これは $|\epsilon_{GX}|$ と比べてもずっと小さくなる．すると $G(\phi, X)\Box\phi$ という項からくる重力ポテンシャルへの補正項は，太陽系スケールにおいて強く抑制されるのである．

領域 $r > r_V$ においては，場の微分項 $\phi'(r)$ は r に関する減少関数となるため，補正項 ξ は $r = r_V$ 付近で最大となる．$r_V \ll H_0^{-1}$ である限り，$\xi(r_V) \approx (r_V/H_0^{-1})^4$ は 1 よりもずっと小さくなる．勿論，$r_*(\sim r_V)$ が原点から著しく遠くにある場合，解 (64) に物質密度の変化からくる補正項を加える必要がある．その場合も式 (64) に現れる小さな値を持った質量項 M^3 は，解 (65) や (66) の場合と同様に，領域 $r > r_V$ においても解に影響し，ξ は抑制されるだろう．

2.2.2 $n > 1$

$n > 1$ の場合について見ていこう．まず，原点まわりでの解の振る舞いを考える．解の正則性の条件から $\phi'(r) \propto r^m$ $(m \geq 1)$ かつ $r \to 0$ の極限で $\rho_m \to \rho_c$ となることを仮定する．すると，方程式 (35) は次のようになる．

$$\frac{d}{dr}(r^2\phi') = \frac{\rho_c}{2M_{\rm pl}^2}\, r^3\phi' - \frac{f_{,\phi}(\phi_c)}{2f(\phi_c)}\, r^2\phi'^2\,, \tag{69}$$

f が定数であるような理論において，方程式 (69) の解は $\phi'(r) \propto e^{\rho_c r^2/(4M_{\rm pl}^2)}/r^2$ で与えられる．よって，これは $r = 0$ で特異点を持つことになる．f が ϕ に依存する場合は，次のような解を得る．

$$\phi'(r) \simeq -\frac{2f(\phi_c)}{f_{,\phi}(\phi_c)}\frac{1}{r}\,, \tag{70}$$

こちらの場合もやはり $r = 0$ において特異点を持つ．よって，どちらの場合も原点における解の正則性の条件を満たすことができない．上で議論した性質により，$n > 1$ かつ $Q = 0$ の理論は有効ではないのである．

3　具体的なモデルへの適用

この節では 2 節で得た結果を様々な具体的モデルに適用していく．

3.1　拡張ガリレオンモデル

まずは次の関数型で特徴付けられる理論について考えよう．

$$F(\phi) = M_{\rm pl}^2 e^{-2Q\phi/M_{\rm pl}}\,, \qquad P(X) = \epsilon X\,, \qquad G(X) = \lambda M^{1-4n} X^n\,, \tag{71}$$

ここで $\epsilon = \pm 1$，n は正の整数 ($n \geq 1$)，そして λ は正でも負でもよい 1 のオーダーの定数である．この場合，作用 (33) における関数 $f(\phi)$ と $g(\phi)$ は厳密に定数，すなわち $f(\phi) = \epsilon$ そして $g(\phi) = \lambda$ となる．

ミンコフスキー極限においてガリレオン対称性 $\partial_\mu \phi \to \partial_\mu \phi + b_\mu$ を回復する共変的ガリレオンモデルは $n = 1$ の場合に相当する [8, 9]．DGP モデルにおいては $\lambda M^{-3} X \Box \phi$ という自己相互作用項がブレーンベンディングモードから発生する．一般の n の場合，背景時空における宇宙膨張はドバリ・ターナーモデルの場合と同様になる [20]．$\epsilon = -1$，$Q = 0$，そして $\lambda > 0$ の場合には $\dot{\phi} = \text{constant}$ となるド・シッターアトラクタが存在することが分かっている．この解が今日の加速膨張に関係する場合，質量 M は今日のハッブル半径 $r_c = H_0^{-1} \approx 10^{28}\,\text{cm}$ と，$M \approx (M_{\rm pl}^{1-2n} r_c^{2n})^{1/(1-4n)}$ といった形で結びつく [20, 21]．

$Q \neq 0$ の場合を考えよう．方程式 (37) を用いると，式 (38) で定義されたヴァインシュタイン半径は次のようになる．

$$r_V = (2^{3-n} n^2 |\lambda|)^{1/(4n-1)} \frac{(|Q| M_{\rm pl} r_g)^{(2n-1)/(4n-1)}}{M} \approx \frac{(|Q| M_{\rm pl} r_g)^{(2n-1)/(4n-1)}}{M}\,. \tag{72}$$

質量 M が ($Q = 0$ の場合と同様に) 近似的な関係式 $M \approx (M_{\rm pl}^{1-2n} r_c^{2n})^{1/(1-4n)}$ を満たす場合，$r_V \approx (|Q| r_g^{2n-1} r_c^{2n})^{1/(4n-1)}$ となる．$n = 1$ の場合，この半径は $r_V \approx (|Q| r_g r_c^2)^{1/3}$ という形に落ちる．$|Q| = \mathcal{O}(1)$ において DGP モデルにおけるヴァインシュタイン半径 $r_V \approx (r_g r_c^2)^{1/3}$ を取り戻し，太陽 ($r_g \approx 10^5\,\text{cm}$) まわりでは $r_V \approx 10^{20}\,\text{cm}$ となる．

式 (37) 及び (41) より，領域 $r \gg r_V$ と $r_* \ll r \ll r_V$ における解は各々 $\phi'(r) \simeq QM_{\rm pl} r_g/(\epsilon r^2)$，$\phi'(r) \simeq QM_{\rm pl} r_g/(\epsilon r_V^2)(r/r_V)^{-1/(2n)}$ で与えられる．$n = 1$ かつ $\lambda > 0$，更に条件 $|Q\rho_c\lambda| \gg M_{\rm pl} M^3$ のもとで領域 $r \ll r_*$ における解は，$\epsilon = +1$ の場合は $\phi'(r) \simeq -[|Q| M^3 \rho_c/(6M_{\rm pl}\lambda)]^{1/2} r$ に，$\epsilon = -1$ の場合は $\phi'(r) \simeq [|Q| M^3 \rho_c/(6M_{\rm pl}\lambda)]^{1/2} r$ のようになる (ただし，いずれも $Q < 0$ の場合)．

$n = 1$ の場合，式 (47) で与えられたマッチング半径 r_* は次のように計算することができる．

$$\frac{r_*}{r_g} \simeq \left(\frac{6|Q\lambda|}{\rho_c r_V^4} \frac{r_V}{r_g} \frac{M_{\rm pl}^3}{M^3} \right)^{1/3}\,. \tag{73}$$

関係式 $M^3 \approx M_{\rm pl} r_c^{-2}$ が成り立つ場合，式 (73) は $r_*/r_g \approx [2|Q\lambda| (r_V/r_g)(\rho_0/\rho_c)(r_c/r_V)^4]^{1/3}$ のようになる．ここで，$\rho_0 \approx 3M_{\rm pl}^2/r_c^2 \approx 10^{-29}\,\text{g/cm}^3$ は今日の宇宙の密度である．$|Q\lambda| = \mathcal{O}(1)$ の場合，太陽 ($\rho_c \approx 10^2\,\text{g/cm}^3$) まわりでは $r_* \approx 10^5 r_g \approx 10^{10}\,\text{cm}$ となり，これは太陽半径と同程度である．式 (43) において与えられた r_ϵ は r_* よりもずっと小さく，故に 2 節で導か

れた解は信用に足る．$r = r_*$ まわりでは解 (46) に物質密度からくる補正項が加わるが，いずれにせよ r_* が r_ϵ よりも小さくなることはない．

$n > 1$ の場合，領域 $r \ll r_*$ と $r_* \ll r \ll r_V$ における解のマッチングには $B(r_V) > 0$，すなわち $\epsilon > 0$ が必要となる．しかしながら，後期ド・シッター解 ($\dot{\phi} = \text{constant}$) が存在するためには $\epsilon < 0$ であることが要求され， これは原点まわりで適切な境界条件を満たす解が存在しないことを意味する．ϵ が正のモデルは暗黒エネルギーとはおよそ無関係ではあるものの，不連続な振る舞いはしない．

$n = 1$ の場合， 領域 $r_* \ll r \ll r_g$ における重力ポテンシャル (54) 及び (55) は次のように与えられる．

$$\Phi \simeq \frac{r_g}{2r}\left[1 - \frac{2Q^2}{\epsilon}\left(\frac{r}{r_V}\right)^{3/2}\right], \qquad \Psi \simeq -\frac{r_g}{2r}\left[1 - \frac{4Q^2}{\epsilon}\left(\frac{r}{r_V}\right)^{3/2}\right]. \tag{74}$$

$|Q| \lesssim 1$ である時，ポストニュートニアン・パラメータ γ への制限 (57) は $r < 5 \times 10^{-4}\, r_V$ において満たされることになる．$M^3 \approx M_{\rm pl} r_c^{-2}$ という関係が成り立つ場合，この制限は太陽まわりでは $r < 10^{17}\,\text{cm}$，地球まわりでは $r < 10^{15}\,\text{cm}$ と計算できる．半径 $r \ll r_*$ において，Φ 及び Ψ への補正項は式 (74) で与えられたものより更に小さくなることに注意する．よってこのモデルは太陽系実験と整合性を持つことができる．$Q = 0$ の場合に関しては，2.2 節で重力ポテンシャルの補正項は $n = 1$ において 1 よりもずっと小さくなることを示した．故に，このモデルは太陽系実験と整合性を持つことができる．$n > 1$ のモデルは，原点において $\phi'(r)$ が発散してしまうといった問題を孕んでいる．この問題は，ガリレオン重力理論 [8, 9] における $\mathcal{L}_4$ 及び $\mathcal{L}_5$ の項から来る非線形な場の補正項があれば変わりうるだろう．

3.2 ディラトン・カップリングしたブランス・ディッケ理論

ブランス・ディッケ理論 [16] は次のような作用で特徴付けられる．

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}\chi R - \frac{\omega_{\rm BD}}{2\chi}(\nabla\chi)^2 + \cdots\right], \tag{75}$$

ここで χ は R と結合したスカラー場であり，$\omega_{\rm BD}$ は BD パラメータである．場 ϕ を $\chi = M_{\rm pl}^2 e^{-2Q\phi/M_{\rm pl}}$ といった形で導入すると，作用 (75) は次のように書き直すことができる [?]．

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}F(\phi)R + (1-6Q^2)\frac{F(\phi)}{M_{\rm pl}^2}X + \cdots\right], \tag{76}$$

ここで，

$$F(\phi) = M_{\rm pl}^2 e^{-2Q\phi/M_{\rm pl}}, \qquad X = -\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2, \qquad Q^2 = \frac{1}{2(3+2\omega_{\rm BD})}. \tag{77}$$

場 φ を $\varphi = 2Q\phi$ のように定義すると，作用 (76) の角括弧は $\mathcal{L} = M_{\rm pl}^2 e^{-\varphi/M_{\rm pl}}[R - \omega_{\rm BD}(\nabla\varphi)^2]/2 + \cdots$ のように表すことができる．これはディラトン重力 [17] は $\omega_{\rm BD} = -1$ の場合に相当することを意味している．ディラトン重力を動機として，場 ϕ が $X\Box\phi$ とも $F(\phi) = M_{\rm pl}^2 e^{-2Q\phi/M_{\rm pl}}$ という形でユニバーサル・カップリングしている理論を考えよう．

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}F(\phi)R + (1-6Q^2)\frac{F(\phi)}{M_{\rm pl}^2}X - \frac{\lambda F(\phi)}{M^3 M_{\rm pl}^2}X\Box\phi\right], \tag{78}$$

ここで λ は 1 のオーダーの定数である．最後の項は低エネルギー有効弦理論における α' 補正として現れる [22]．カップリング Q は $Q^2 \neq 1/6$ を満たし，1 のオーダーであると考える．作用 (78) は式 (33) において，$f(\phi) = (1-6Q^2)F(\phi)/M_{\rm pl}^2$，$g(\phi) = \lambda F(\phi)/M_{\rm pl}^2$，そして $n=1$ と選んだ場合に対応している．場が原点において，$|\phi(0)| \ll M_{\rm pl}$ という境界条件を満たす場合を考えよう．場の微分項 $\phi'(r)$ は小さいがために，条件 $|\phi(r)| \ll M_{\rm pl}$ は $r > 0$ において満たされることになる．式 (77) より，ディラトン重力 ($\omega_{\rm BD} = -1$) は $Q^2 = 1/2$ に相当する．

式 (38) によって定義されるヴァインシュタイン半径は，次のように与えられる．

$$r_V \approx \left(\frac{|4Q\lambda|}{(1-6Q^2)^2} \frac{M_{\rm pl} r_g}{M^3} \right)^{1/3}, \tag{79}$$

ここで，$F \approx M_{\rm pl}^2$ 及び $B \approx 1 - 6Q^2$ といった近似を用いた．モデル (78) が後期加速膨張と関係する場合，$\dot{\phi} = \text{constant}$ 及び $M^3 \approx M_{\rm pl} r_c^{-2}$ で特徴付けられるド・シッター解が存在することを示すことができる．$|Q|$ と $|\lambda|$ が 1 のオーダーであれば，ヴァインシュタイン半径 (79) は $r_V \approx (r_g r_c^2)^{1/3}$ のように計算することができる．

条件 $|Q\rho_c\lambda| \gg M_{\rm pl} M^3 (1-6Q^2)^2$ のもと，領域 $r \ll r_*$ における解は $Q^2 < 1/6$ の場合 $\phi'(r) \simeq -[|Q|M^3\rho_c/(6M_{\rm pl}\lambda)]^{1/2} r$，$Q^2 > 1/6$ の場合 $\phi'(r) \simeq [|Q|M^3\rho_c/(6M_{\rm pl}\lambda)]^{1/2} r$ で与えられる．式 (47) で与えられるマッチング半径 r_* は，次のように計算される．

$$\frac{r_*}{r_g} \approx \left[\frac{2|Q\lambda|}{(1-6Q^2)^2} \frac{r_V}{r_g} \frac{\rho_0}{\rho_c} \left(\frac{r_c}{r_V} \right)^4 \right]^{1/3}, \tag{80}$$

ここで関係式 $M^3 \approx M_{\rm pl} r_c^{-2}$，及び $\rho_0 \approx 3M_{\rm pl}^2/r_c^2$ を用いた．$|Q\lambda| = \mathcal{O}(1)$ とすると，r_* は式 (73) の場合と同じオーダーになり，2 節で導かれた場の方程式の解はやはり信頼に足ることになる．

方程式 (54) と (55) より，領域 $r_* \ll r \ll r_V$ において重力ポテンシャルは次のように計算することができる．

$$\Phi \simeq \frac{r_g}{2r} \left[1 - \frac{2Q^2}{1-6Q^2} \left(\frac{r}{r_V} \right)^{3/2} \right], \qquad \Psi \simeq -\frac{r_g}{2r} \left[1 - \frac{4Q^2}{1-6Q^2} \left(\frac{r}{r_V} \right)^{3/2} \right]. \tag{81}$$

観測的な制限 (57) は次のように翻訳され，

$$\left(\frac{r}{r_V} \right)^{3/2} < 2.3 \times 10^{-5} \frac{|1-6Q^2|}{2Q^2}. \tag{82}$$

例えばディラトン重力 ($Q^2 = 1/2$) の場合，この制限は太陽まわりにおいて $r < 10^{-3} r_V \approx 10^{17}\,\text{cm}$ のようになる．この上限値は太陽系実験の半径よりもずっと大きくなる．

4 まとめ

私は作用 (1) で記述されるような二次のスカラーテンソル理論におけるヴァインシュタイン機構について研究した．順圧完全流体が存在する球対称背景時空のもと，完全な運動方程式を導いた．式 (8) によって定義された微小パラメータ ϵ_i を導入し，弱い重力場近似のも

と支配的な寄与を抜き出すことで，スカラー場 ϕ 及び重力ポテンシャル Ψ の閉じた方程式を導出した．1 節で用いた近似は $|\epsilon_i| \ll 1$ の条件下で有効であり，この条件は太陽系実験との整合性のために要請される．

ヴァインシュタイン機構が働く一般的な理論は，非最小結合 $F(\phi) = M_{\rm pl}^2 e^{-2Q\phi/M_{\rm pl}}$ を持つ作用 (33) によって記述される．この作用は拡張ガリレオンモデルやディラトン重力，及び非線形な場の相互作用を持つブランス・ディッケ理論といった幅広い修正重力理論を内包する．そのような理論において，我々はヴァインシュタイン半径 r_V の一般的な表式 (38) を導いた．

$Q \neq 0$ の場合，領域 $r \gg r_V$ における場の方程式の解は式 (37) で与えられ，これは重力ポテンシャルに大幅な修正を加える．領域 $r_* \ll r \ll r_V$ において解は式 (41) のように変化し，故に重力の修正は $|Q| = \mathcal{O}(1)$ の場合においても抑制されることとなる．この領域において我々は重力ポテンシャルの解析的な解を導き，ポストニュートニアン・パラメータ γ の観測的な制限は条件 (57) のもとで満たされることを示した．領域 $r \ll r_*$ においては，$Q \neq 0$ での場の方程式の解が $\phi'(r) \propto r$ で与えられ，球対称中心における解の正則条件 $\phi'(0) = 0$ が満たされる．

$Q = 0$ かつ $n = 1$ の場合，そのモデルが後期加速膨張と関係するならば，重力ポテンシャルへの補正は太陽系スケールにおいて極度に小さくなることが分かった．$Q = 0$ かつ $n > 1$ の場合，原点まわりでの解は安定ではなく，故にこの理論は有用なものとして扱うことはできない．

我々は，導いた一般的な結果を拡張ガリレオン理論やディラトン・カップリングしたブランス・ディッケ理論に適用した．$Q \neq 0$ かつ $n = 1$ となるような理論では，領域 $r_* \ll r \ll r_V$ において $(r/r_V)^{3/2}$ 程度のオーダーの修正がニュートン重力ポテンシャルに加わるが，太陽系スケールでは局所重力実験からの制限は満たされることが分かる．また，$Q = 0$ かつ $n = 1$ の場合，重力ポテンシャルへの補正は更に小さくなる．$Q \neq 0$ かつ $n > 1$ である拡張ガリレオン理論においては，このモデルが後期加速膨張と関連する場合，$r = r_*$ におけるマッチングに問題が生じることを示した．

このヴァインシュタイン機構が，G_5 及び X に依存した G_4 が存在する Horndeski の最も一般的なスカラーテンソル理論において，どのように働くのかを考えることは非常に興味深い．現在の観測的，実験的な制限を満たす有用な暗黒エネルギーモデルを構築することもまた面白い研究になるだろう．特に，ニュートン定数の変化に対する制限 ($|\dot{G}/G| < 0.02 H_0$，ここで H_0 は今日のハッブルパラメータ) はそのようなモデルに厳しい制限を課すと考えられる [23]．我々はこれらを今後の課題としていく．

参考文献

[1] A. G. Riess *et al.*, Astron. J. **116**, 1009 (1998); Astron. J. **117**,707 (1999); S. Perlmutter *et al.*, Astrophys. J. **517**, 565 (1999).

[2] S. Weinberg, Rev. Mod. Phys. **61**, 1 (1989)

[3] Y. Fujii, Phys. Rev. D **26**, 2580 (1982); L. H. Ford, Phys. Rev. D **35**, 2339 (1987); C. Wetterich, Nucl. Phys B. **302**, 668 (1988); B. Ratra and J. Peebles, Phys. Rev D **37**, 3406 (1988); T. Chiba, N. Sugiyama, T. Nakamura, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **289**, L5-L9 (1997); R. R. Caldwell, R. Dave and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **80**, 1582 (1998).

[4] S. M. Carroll, Phys. Rev. Lett. **81**, 3067 (1998); C. F. Kolda and D. H. Lyth, Phys. Lett. B **458**, 197 (1999).

[5] S. Capozziello, Int. J. Mod. Phys. D **11**, 483 (2002); S. Capozziello, S. Carloni and A. Troisi, Recent Res. Dev. Astron. Astrophys. **1**, 625 (2003); S. Capozziello, V. F. Cardone, S. Carloni and A. Troisi, Int. J. Mod. Phys. D **12**, 1969 (2003); S. M. Carroll, V. Duvvuri, M. Trodden and M. S. Turner, Phys. Rev. D **70**, 043528 (2004); S. M. Carroll, A. De Felice, V. Duvvuri, D. A. Easson, M. Trodden and M. S. Turner, Phys. Rev. **D71**, 063513 (2005).

[6] L. Amendola, Phys. Rev. D **60**, 043501 (1999); J. P. Uzan, Phys. Rev. D **59**, 123510 (1999); T. Chiba, Phys. Rev. D **60**, 083508 (1999); N. Bartolo and M. Pietroni, Phys. Rev. D **61** 023518 (1999); F. Perrotta, C. Baccigalupi and S. Matarrese, Phys. Rev. D **61**, 023507 (1999).

[7] G. R. Dvali, G. Gabadadze and M. Porrati, Phys. Lett. **B485**, 208-214 (2000).

[8] A. Nicolis, R. Rattazzi and E. Trincherini, Phys. Rev. **D79**, 064036 (2009).

[9] C. Deffayet, G. Esposito-Farese and A. Vikman, Phys. Rev. D **79**, 084003 (2009); C. Deffayet, S. Deser and G. Esposito-Farese, Phys. Rev. D **80**, 064015 (2009).

[10] J. Khoury and A. Weltman, Phys. Rev. Lett. **93**, 171104 (2004); Phys. Rev. **D69**,044026 (2004).

[11] A. A. Starobinsky, JETP Lett. **86**, 157 (2007). S. Tsujikawa, Phys. Rev. D **77**, 023507 (2008). S. A. Appleby and R. A. Battye, JCAP **0805**, 019 (2008). A. V. Frolov, Phys. Rev. Lett. **101**, 061103 (2008).

[12] A. I. Vainshtein, Phys. Lett. B **39**, 393 (1972).

[13] A. Nicolis and R. Rattazzi, JHEP **0406**, 059 (2004); K. Koyama and R. Maartens, JCAP **0601**, 016 (2006); D. Gorbunov, K. Koyama and S. Sibiryakov, Phys. Rev. D **73**, 044016 (2006). M. Fairbairn and A. Goobar, Phys. Lett. B **642**, 432 (2006); R. Maartens

and E. Majerotto, Phys. Rev. D **74**, 023004 (2006); U. Alam and V. Sahni, Phys. Rev. D **73**, 084024 (2006); Y. S. Song, I. Sawicki and W. Hu, Phys. Rev. D **75**, 064003 (2007); J. Q. Xia, Phys. Rev. D **79**, 103527 (2009).

[14] G. W. Horndeski, Int. J. Theor. Phys. 10, 363-384 (1974).

[15] A. De Felice, R. Kase and S. Tsujikawa, Phys. Rev. **D85**, 044059 (2012).

[16] C. Brans and R. H. Dicke, Phys. Rev. **124**, 925 (1961).

[17] M. Gasperini and G. Veneziano, Astropart. Phys. **1**, 317 (1993); Phys. Rept. **373**, 1 (2003).

[18] C. Armendariz-Picon, T. Damour and V. F. Mukhanov, Phys. Lett. **B458**, 209-218 (1999); T. Chiba, T. Okabe and M. Yamaguchi, Phys. Rev. **D62**, 023511 (2000); C. Armendariz-Picon, V. F. Mukhanov and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **85**, 4438-4441 (2000).

[19] C. M. Will, Living Rev. Rel. **9**, 3 (2005).

[20] R. Kimura and K. Yamamoto, JCAP **1104**, 025 (2011).

[21] A. De Felice and S. Tsujikawa, arXiv:1110.3878 [gr-qc] (JCAP to appear).

[22] R. R. Metsaev and A. A. Tseytlin, Nucl. Phys. **B293**, 385 (1987); C. Cartier, J. -c. Hwang and E. J. Copeland, Phys. Rev. **D64**, 103504 (2001).

[23] E. Babichev, C. Deffayet and G. Esposito-Farese, Phys. Rev. Lett. **107**, 251102 (2011).