

QFT on de Sitter:  
Lorentzian flat chart  
and  
Euclidean sphere

京大 基研  
D2 高麗 雄介  
共同: 田中 貴浩

# Introduction

- de Sitter時空上の場の量子論？
  - それ自体がおもしろい
    - de Sitterは極大対称で非自明(曲率ノンゼロ)な空間
    - 背景が極大対称空間であるがゆえに、  
曲がった時空上の場の理論に対して、**解析計算が可能**
  - 宇宙論からの動機づけ
    - インフレーション宇宙(≡ de Sitter)における量子揺らぎ
      - 宇宙の構造の種や宇宙背景放射の揺らぎは、インフレーション宇宙における量子揺らぎがその起源であると考えられている
    - 場の**高次相関**
      - 初期宇宙の情報をより多く運ぶ
      - **相互作用場の量子論**を扱うことになる

# Problem

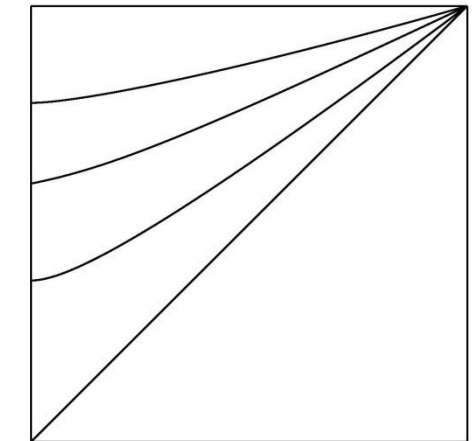
- 宇宙論でのセットアップ

- de Sitterのflat chart (右図)  
そこでの相互作用QFT

- 高次相関

- $i\epsilon$  処方で定義される“相互作用真空”
- 初期条件: 自由Bunch-Davies or Euclidean真空  $|0\rangle_{\text{free}}$

$$|\Omega\rangle = \lim_{\eta \rightarrow -\infty(1-i\epsilon)} e^{-i \int_{\eta}^{\eta_0} H(\eta) d\eta} |0\rangle_{\text{free}}$$



$$ds^2 = \frac{1}{(H\eta)^2} (-d\eta^2 + d\mathbf{x}^2)$$

- この処方によって選ばれる真空は、どんなものか？

- 特に、de Sitter不変な状態を定義するか？



この“真空状態”に関する、observable  
のあらゆる相関を調べる

- Note

- 同様の問題はHiguchi et al, PRD84 (2011)でも考えられている
  - 「この真空は相互作用場に対するEuclidean vacuumと一致」
- 我々は直接計算により、同様の結果を得た

# Correlators - in-in perturbation -

- 相互作用場の理論: モデル

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left\{ -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \lambda \phi^n \right\}$$

- 相関関数:  $\langle \Omega | \phi(x_1) \cdots \phi(x_N) | \Omega \rangle$   $\left[ |\Omega\rangle = \lim_{\eta \rightarrow -\infty(1-i\epsilon)} e^{-i \int_\eta^{\eta_0} H(\eta) d\eta} |0\rangle_{\text{free}} \right]$

## ➡ In-in perturbation theory

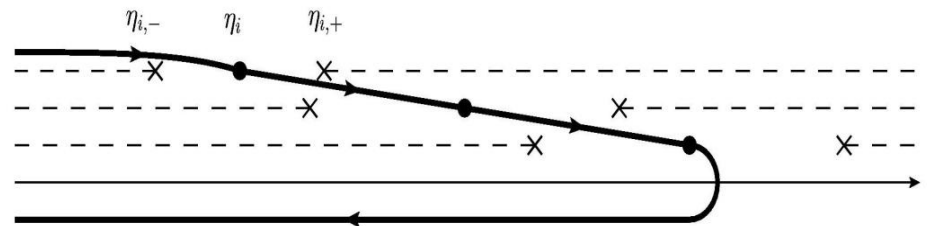
- Vertex積分: 時間座標の複素平面上のin-in pathに沿う

- はじまり:  $-\infty(1-i\epsilon)$

おわり:  $-\infty(1+i\epsilon)$

複素平面上にある

外点によるbranch cutを  
すべて避けるようにとる。



- $\langle \Omega | \phi(x_1) \cdots \phi(x_N) | \Omega \rangle$  に寄与する任意のグラフに対して  
解析的な表示を得るのがゴール

# Example: Single vertex (1/2)

- 例

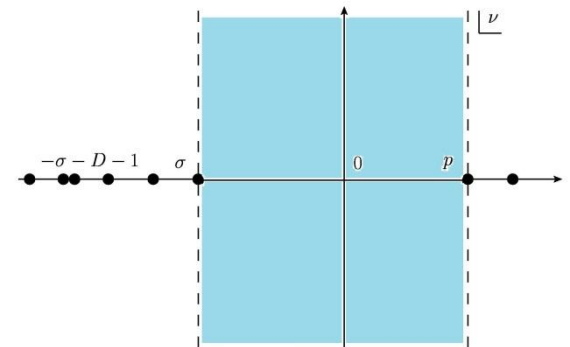
- Single vertex diagram:  $\mathcal{V}_n = \int d^{D-1}y \int_{\text{in-in}} \frac{d\eta}{(-\eta)^D} G(x_1, y) \cdots G(x_n, y)$
- プロパゲータに対する Barnes representations

[First applied to de Sitter QFT by [Marolf and Morrison (2010)] and [Hollands (2010)]]

$$G(x, y) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\nu \left( \frac{1 - x \cdot y}{2} \right)^\nu \Gamma(-\nu) \psi(\nu)$$

- $\mathcal{V}_n$  に代入

$$\mathcal{V}_n = \int d^{D-1}y \int_{\text{in-in}} \frac{d\eta}{(-\eta)^D} \left( \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\nu_1 \cdots \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\nu_n \right) \left( \left[ \prod_{i=1}^n \left( \frac{1 - x_i \cdot y}{2} \right)^{\nu_i} \right] \left[ \prod_{i=1}^n \Gamma(-\nu_i) \psi(\nu_i) \right] \right)$$



pole structure of  $\psi(\nu)$

- と    の積分順序を交換

$$\left( \sigma = -\frac{D}{2} + \sqrt{\frac{D^2}{4} - m^2} \right)$$

- Fubini's theorem:

If one of the following three integrals are convergent,

$$\int dm(x) \int dm'(y) |f(x, y)|, \quad \int dm'(y) \int dm(x) |f(x, y)|, \quad \int dm''(x, y) |f(x, y)|$$

then

$$\int dm(x) \int dm'(y) f(x, y) = \int dm'(y) \int dm(x) f(x, y)$$

# Example: Single vertex (2/2)

- 計算

$$\mathcal{V}_n = \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\nu_1 \cdots \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\nu_n \int d^{D-1}y \int_{\text{in-in}} \frac{d\eta}{(-\eta)^D} \left[ \prod_i \left( \frac{1 - x_i \cdot y}{2} \right)^{\nu_i} \right] \left[ \prod_i \Gamma(-\nu_i) \psi(\nu_i) \right]$$

- 生成関数

$$\mathcal{A}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) := \int_{\mathbf{R}^{D-1}} d^{D-1}y \int_{P_y} \frac{d\eta}{(-\eta)^D} \left( \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \frac{1 - x_i \cdot y}{2} + \frac{1 - x_n \cdot y}{2} \right)^\lambda$$

–  $\mathcal{A}$  の Mellin transformation は  $\square$  を与えることがわかる  
 [For the basic idea, see Marolf and Morrison (2011)]

$$\square \propto \int_0^{+\infty} d\alpha_1 \cdots \int_0^{+\infty} d\alpha_{n-1} \mathcal{A}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$$

- 頑張って計算すると,

$$\mathcal{A}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) = (-i)(4\pi)^{D/2} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{d\kappa}{2\pi i} \Gamma \left[ \begin{matrix} 2\kappa - \lambda, -\kappa, \lambda + \frac{D}{2} - \kappa \\ D + \lambda, -\lambda \end{matrix} \right] G^{\lambda-2\kappa} C^{2\kappa}$$

$$\left( G = \sum_{i=1}^n \alpha_i, \quad C^2 = \sum_{i<j}^n \alpha_i \alpha_j \frac{1 - x_i \cdot x_j}{2}, \quad \alpha_n := 1 \right)$$

# Compare with Euclidean

- 他方、Euclidean sphere 上でvertex積分すると、

[Marolf and Morrison (2011)]

$$\int_{y \in S^D} dV \left( \sum_i \alpha_i \frac{1 - x_i \cdot y}{2} \right)^\lambda \left[ G = \sum_{i=1}^n \alpha_i, \quad C^2 = \sum_{i < j} \alpha_i \alpha_j \frac{1 - x_i \cdot x_j}{2}, \quad \alpha_n = 1 \right]$$
$$= (4\pi)^{D/2} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{d\kappa}{2\pi i} \Gamma \left[ \begin{matrix} 2\kappa - \lambda, -\kappa, \lambda + \frac{D}{2} - \kappa \\ D + \lambda, -\lambda \end{matrix} \right] G^{\lambda-2\kappa} C^{2\kappa}$$

- さっき求めたflat chartのものは

$$\int_{\mathbf{R}^{D-1}} d^{D-1}y \int_{P_y} \frac{d\eta}{(-\eta)^D} \left( \sum_i \alpha_i \frac{1 - x_i \cdot y}{2} \right)^\lambda$$
$$= (-i)(4\pi)^{D/2} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{d\kappa}{2\pi i} \Gamma \left[ \begin{matrix} 2\kappa - \lambda, -\kappa, \lambda + \frac{D}{2} - \kappa \\ D + \lambda, -\lambda \end{matrix} \right] G^{\lambda-2\kappa} C^{2\kappa}$$

- 解析表示が全く同じ！



Lorentzian flat chart での相関と

Euclidean sphere での相関は、すくなくともtreeで完全に等価であることがわかる

# Arbitrary Graphs (1/2)

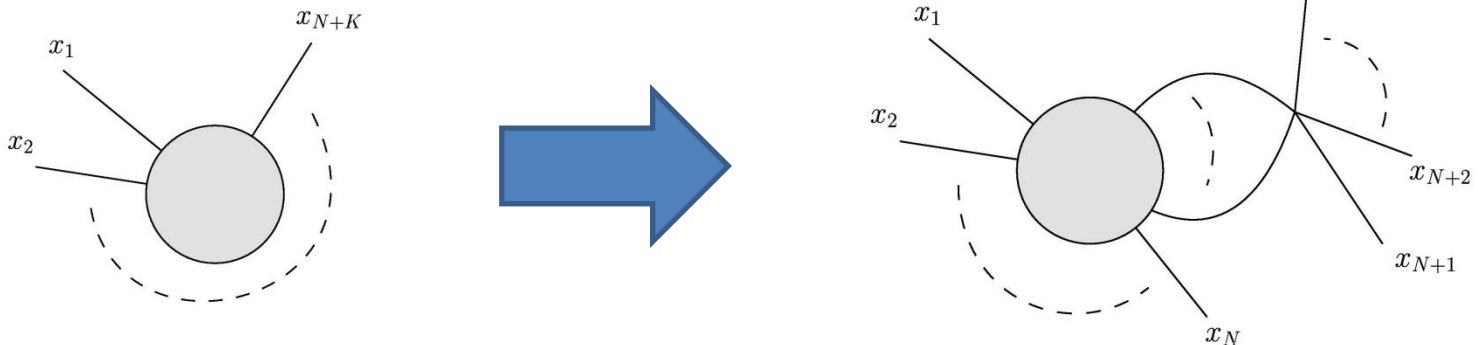
- 任意のグラフに対する解析表示を得ること：  
帰納法

- 1. N-pt関数が、次の形を持つことを要求

$$\mathcal{V}_N = \int da_{12} \cdots \int da_{N-1,N} \left[ \prod \left( \frac{1 - x_i \cdot x_j}{2} \right)^{a_{ij}} \Gamma(-a_{ij}) \right] V_N(a_{ij})$$

- 2. あらたなグラフを、  
次の操作によって構成してゆく：

- a) (N+K)-pt関数を用意
- b) a)で用意した(N+K)-pt関数の、K外点の一致極限をと  
り、その行先を  $y$  とする
- c) (M-N)本のプロパゲータを  $y$  につなげて、 $y$  につい  
て積分。より多くのループを持つM-pt関数となる





# Arbitrary Graphs (2/2)

- 積分実行

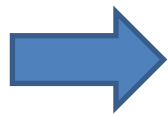
- 例としてつぎの積分

$$\mathcal{V}_M = \int_{y \in \text{in-in}} dV \mathcal{V}_{N+1}(x_1, \dots, x_N, y) G(x_{N+1}, y) \cdots G(x_M, y)$$

- Mellin-Barnes representationsを代入

$$\mathcal{V}_{N+1} = \int \prod_{i < j}^N da_{ij} \int \prod_{i=1}^N d\nu_i \left[ \prod \left( \frac{1 - x_i \cdot x_j}{2} \right)^{a_{ij}} \Gamma(-a_{ij}) \right] \left[ \prod \left( \frac{1 - x_i \cdot y}{2} \right)^{\nu_i} \Gamma(-\nu_i) \right] V_{N+1}(a_{ij}, \nu_i)$$

$$G(x_I, y) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\nu_I \left( \frac{1 - x_I \cdot y}{2} \right)^{\nu_I} \Gamma(-\nu_I) \psi(\nu_I) \quad (I = N + 1, \dots, M)$$

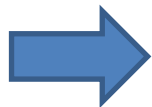


$$\mathcal{V}_M = \int_{y \in \text{in-in}} dV \int da_{12} \cdots \int da_{N-1,N} \int d\nu_1 \cdots \int d\nu_M$$

$$\times \left[ \prod_{i=1}^N \left( \frac{1 - x_i \cdot y}{2} \right)^{\nu_i} \right] \left[ \prod \left( \frac{1 - x_i \cdot x_j}{2} \right)^{a_{ij}} \Gamma(-a_{ij}) \right] V_{N+1}(a_{ij}) \left[ \prod_{I=N+1}^M \Gamma(-\nu_I) \psi(\nu_I) \right]$$

- ふたたび **Fubini's theorem** により、二つの積分順序を交換できる

- Integrating first for  $y$



Euclidean sphereの相関と全く等価な解析表式

# Summary

- 初期条件をfree Euclidean vacuumとするflat chartにおけるin-in 相関関数を計算

– Euclidean Correlators 等価 Lorentzian Correlators  
For single vertex graphs

– その後、任意のグラフについて考察

The essence: **Volume integral**  $\longleftrightarrow$  **Barnes integrals**

– 解析表示はつぎのようになる:

$$\mathcal{V}_N = \int da_{12} \cdots \int da_{N-1,N} \left[ \prod \left( \frac{1 - x_i \cdot x_j}{2} \right)^{a_{ij}} \Gamma(-a_{ij}) \right] V_N(a_{ij})$$

$V_N(a_{ij})$  は適切な性質を満たす

- QFT on flat chartを調べる新たな方法

– **In-in correlator on flat chart と Euclidean correlator の等価性を直接計算によりしめす**

– より多くの理論に適用できる