Charged Lovelock Black Hole の安定性解析

高橋　智洋

1 Introduction

ブレーンワールドシナリオは加速器実験において高次元ブラックホールが生成されることを予言している。そのため、高次元ブラックホールが興味を持たれ、様々な性質が調べられている。それらのうちで、ブラックホール生成の観点から重要な性質はブラックホールの安定性である。これは、不安定なブラックホールは時間発展の atractor にはなりえず、実際には生成されえないからである。

これまで高次元 Schwarzschild black hole や高次元回転 black hole など多くのブラックホール解の安定性が調べられて来た。そのほとんどが高次元 Einstein 理論を土台としている。ここで一つの疑問が生じる。Einstein 理論は 4 次元で定式化されたものだと思うと、重力理論を高次元に拡張する必要が生じる。その際どのような拡張が自然なのか?

今回は、4 次元の Einstein 理論を特徴付ける二つの性質 “一般座標変換に対する不変性” と “EOM が力学変数の二階微分までで構成されている” を保つような拡張を考える。勿論、高次元 Einstein 理論もこれを満たす。しかし最も一般的な理論は、今回注目する Lovelock 理論である。

この Lovelock 理論には、Maxwell 場が couple した系におけるブラックホール解が存在する。ここでは、この解の安定性を調べる。

2 Lovelock-Maxwell 系

general coordinate covariance があり、かつ、EOM が metric の二階微分まででかける最も一般的な action は

$$\mathcal{L}_{Lovelock} = \sum_{m=1}^{k} \frac{a_m}{2^m m} \mathcal{L}_m \tag{1}$$

where

$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{2^m} \delta^{\lambda_1\sigma_1\cdots\lambda_m\sigma_m}_{\rho_1\kappa_1\cdots\rho_m\kappa_m} R_{\lambda_1\sigma_1}{}^{\rho_1\kappa_1} \cdots R_{\lambda_m\sigma_m}{}^{\rho_m\kappa_m} \ , \tag{2}$$

and

$$\delta^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_p} = \det \begin{pmatrix} \delta^{\mu_1}_{\nu_1} & \delta^{\mu_1}_{\nu_2} & \cdots & \delta^{\mu_1}_{\nu_p} \\ \delta^{\mu_2}_{\nu_1} & \delta^{\mu_2}_{\nu_2} & \cdots & \delta^{\mu_2}_{\nu_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^{\mu_p}_{\nu_1} & \delta^{\mu_p}_{\nu_2} & \cdots & \delta^{\mu_p}_{\nu_p} \end{pmatrix} .$$

ここに、a_m は定数で k は dimension と $[(D-2)/2]$ と関係付いている。今回は簡単化のため、$k=2$、つまり $D=5,6$ に話を限り、$a_1=1$, $a_2>0$ として話を進める。

今回注目するのは Lovelock-Maxwell 系で、それは

$$S = \int d^Dx\sqrt{-g}\left[-2\Lambda + \sum_{m=1}^{2}\left\{\frac{a_m}{m}\mathcal{L}_m\right\}\right] - \int \sqrt{-g}\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{3}$$

という action で記述される。これを $g_{\mu\nu}$ で変分を取ると

$$\mathcal{G}_\mu{}^\nu = T_\mu{}^\nu, \tag{4}$$

where

$$\mathcal{G}_\mu{}^\nu = -\sum_{m=1}^{2}\frac{1}{2^{m+1}}\frac{a_m}{m}\delta^{\nu\lambda_1\sigma_1\cdots\lambda_m\sigma_m}_{\mu\rho_1\kappa_1\cdots\rho_m\kappa_m}R_{\lambda_1\sigma_1}{}^{\rho_1\kappa_1}\cdots R_{\lambda_m\sigma_m}{}^{\rho_m\kappa_m} \tag{5}$$

and

$$T_\mu{}^\nu = F_{\mu\lambda}F^{\nu\lambda} - \frac{1}{4}F_{\lambda\rho}F^{\lambda\rho}\delta^\nu_\mu\ . \tag{6}$$

という方程式が得られる。A_μ で変分を取ると

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \tag{7}$$

が得られる。また、$F=dA$ であるから identity

$$F_{[\mu\nu;\lambda]} = 0. \tag{8}$$

という方程式も満たさなければならない。

3 Background Solution

(4), (7) ,(8) には exact solution がある。その metric 及び電磁場は以下の通り。

$$\begin{aligned} ds^2 &= -f(r)dt^2 + 1/f(r)dr^2 + r^2\gamma_{ij}dx^idx^j, \\ F^{tr} &= E(r), \quad \text{otherwise} = 0\ . \end{aligned} \tag{9}$$

where

$$
\begin{aligned}
f(r) &= 1 - r^2\left(-1 + \sqrt{1 + 2a_2\mu/r^{n+1} - 2a_2Q^2/r^{2n}}\right)/a_2 \\
E(r) &= \sqrt{n(n-1)}Q/r^n \ . \qquad (10)
\end{aligned}
$$

ここに μ が black hole の mass を表しており、Q が charge を表している。この解は $r \to \infty$ としてみれば分かるように、asymptotic flat な解である。また、$f(r)$ の square root の中が 0 となるところに singularity がある。

singularity をそのままにしておくのは心苦しいので、horizon を考える。horizon は $f(r) = 0$ となるところにある。しかし、RN black hole と同様に常に存在する訳ではなく、

$$
\alpha(r) = \frac{Q^2}{r_H^{n-1}} + r_H^{n-1} + \frac{a_2}{2}r^{n-3} \qquad (11)
$$

とし、これの極値を取る r を r_{ex} としたとき、

$$
\mu > \mu_{ex} \equiv \alpha(r_{ex}) \ . \qquad (12)
$$

を満たさなければならない。

4 Tensor-Type Perturbations

(9) に摂動を加えて、安定性を調べる。background が球対称性を持っているので、摂動を tensor,vector, scalar に分けて考えることができる。ここでは tensor について調べる。今回は $\mu > \mu_{ex}$、つまりちゃんと horizon がある場合に話を限り、また、horizon の外側のみを考える。

tensor perturbation は以下の様に特徴付けられる。

$$
\begin{aligned}
\delta g_{tt} &= \delta g_{tr} = \delta g_{ti} = \delta g_{rr} = \delta g_{ri} = 0 \\
\delta g_{ij} &= r^2\chi(r)e^{i\omega t}h_{ij}^T \ , \qquad (13)
\end{aligned}
$$

ここに χ が master variable で h_{ij}^T が tensor harmonics である。例えば、$h_{ij}^{T|k}{}_{|k} = (\ell(\ell+n-1)-2)h_{ij}^T$ を満たす。この摂動に関する方程式は以下の通りである。

$$
-f^2T'\chi'' - \left(f^2T'' + \frac{2f^2T'}{r} + ff'T'\right)\chi' + \frac{\ell(\ell+n-1)f}{(n-2)r}T''\chi = \omega^2T'\chi \ . \qquad (14)
$$

ここに、

$$
T(r) = r^{n-1}\sqrt{1 + 2a_2\mu/r^{n+1} - 2a_2Q^2/r^{2n}} \ . \qquad (15)
$$

上式を変形する。まず、$\Psi(r)=\chi(r)r\sqrt{T'(r)}$ という変数を用意する。$\sqrt{T'}$ となっているので、T' に negative な領域があるとまずそうに見えるが、上の T から具体的に計算できるように、この量は positive definite である。さらに radial を tortoise coordinate r^* に変更すると上の式は

$$
\begin{aligned}
&-\frac{d^2\Psi}{dr^{*2}}+V_t(r(r^*))\Psi=\omega^2\Psi\ ,\\
&V_t(r)=\frac{\ell(\ell+n-1)f}{(n-2)r}\frac{d\ln T^{'}}{dr}+\frac{1}{r\sqrt{T^{'}}}f\frac{d}{dr}\left(f\frac{d}{dr}r\sqrt{T^{'}}\right)
\end{aligned}
\tag{16}
$$

という Schrödinger 方程式を得ることができる。もともと $e^{i\omega t}$ と変換していたので、この方程式に negative energy state が存在すると不安定である。

以下では $T''<0$ な領域があると不安定であることを示す。そのために、内積

$$
(\varphi_1,\varphi_2)=\int_I\varphi_1^*\varphi_2 dr^*\ . \tag{17}
$$

を定義し、

$$
\frac{(\varphi,\mathcal{H}\varphi)}{(\varphi,\varphi)}\geq\omega_0^2 \tag{18}
$$

という不等式を利用する。ここに

$$
\mathcal{H}\equiv-\frac{d^2}{dr^{*2}}+V_t \tag{19}
$$

で ω_0^2 は最低 energy state のエネルギー、φ は任意の函数である。よって上不等式から $(\varphi,\mathcal{H}\varphi)$ が negative になるような φ を見つければ良い。

T'' が negative な領域を持つと仮定する。そこから有界閉集合 I を持って来て、そこにしか値を持たないような滑らかな函数を φ_0 とする。すると

$$
\begin{aligned}
(\varphi_0,\mathcal{H}\varphi_0) &= \int_I dr^*\left[-\varphi_0^*\partial_{r^*}^2\varphi_0+V_t|\varphi_0|^2\right]\\
&= \int_I|\partial_{r^*}\varphi_0-f\frac{d}{dr}\ln{(r\sqrt{T'})}\varphi_0|^2dr^*+\ell(\ell+n-1)\int_I\frac{f|\varphi_0|^2}{(n-2)r}\frac{T''}{T'}dr^*
\end{aligned}
\tag{20}
$$

と評価することができる。二つ目の等号では発散定理を使っている。最後の式で一つ目の積分は ℓ に依存しない正の定数である。それに対して、第二式は $\ell(\ell+n-1)$ に比例した negative な量である。よって、$\ell\to\infty$ という極限をとると、必ず $(\varphi_0,\mathcal{H}\varphi_0)$ は negative になる。これは (18) と合わせることで、negative energy state の存在を表してる。

$T''<0$ な領域があると ℓ が非常に大きなモードに不安定性がある。

T の具体形を用いれば、どのような parameter で不安定性があるかを調べる事ができるがここでは割愛する。

5　まとめ

重力理論の自然な拡張である Lovelock 理論において charged solution の安定性解析を行った。ここでは tensor についてのみ調べた。その結果 $T(r) = r^{n-1}\sqrt{1+2a_2\mu/r^{n+1}-2a_2Q^2/r^{2n}}$ の振る舞いを見る事で安定性を調べられると分かった。具体的にはこの函数の二階微分が negative になると不安定である。

future work としては、vector や scalar への拡張が挙げられる。これらでは A_μ の揺らぎも考えなくてはならないので、複雑であるがそれらを調べる事で complete な解析と言える。また、何故球対称な解に不安定性があるのか、ℓ が大きいモードが不安定だが不安定な結果何が生じるのか、など多くの問題が残されている。