

# Lorentz covariance of LQG

Review:Lorentz covariance of loop quantum gravity

C.Rovelli and S.Speziale , Physical Review D 83,104029 (2011)

名古屋大学院 理学研究科  
素粒子的宇宙論・重力理論研究室  
久木田 真吾

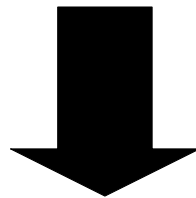
# 目的

GRの作用は四脚場 $e$ と $so(3,1)$ に値を持つスピン接続 $\omega$ を使って以下のように書き下せる。

$$S[e, \omega] = \int \left( (e^a \wedge e^b)^* + \frac{1}{\gamma} (e^a \wedge e^b) \right) \wedge \Omega_{ab}(\omega)$$

第二項は運動方程式に影響を与えない。 $\gamma$ は一般に任意の複素数(Barbero-Immirziパラメータ)。

4次元微分同相変換不変性 + 局所Lorentz変換不変性



LQGではあらわに見えない。

この段階で現れているLorentz不変性をLQGで量子化したあとも見えるようにしたい。

# 四脚場形式での正準理論

計量理論での(3+1)分解( $M = R \times \Sigma$ ) +

**gauge fixing (timelikeな四脚場を適当に固定し、それを不変にする変換のみを許容する)**

➡ この系に現れるのはSU(2)不変性となる

Ashtekar接続Aと 三脚場E

$$A_{\mu}^i = \epsilon_{jk}^i \omega_{\mu}^{jk} + \gamma \omega_{\mu}^{0i} \quad E_j^{\nu} = \frac{1}{\sqrt{h}} e_j^{\nu} \quad \begin{array}{l} \mu, \nu = 1, 2, 3 \\ i, j = 1, 2, 3 \end{array}$$

$h$ は $\Sigma$ 上3次元計量の行列式

を正準変数にとることで、Hamiltonianは

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\gamma} (S[N] + \mathcal{D}[N_{\mu}] + \mathcal{G}[\Lambda^k])$$

と書き換えられる。ただし  $8\pi G = 1, c = 1$

# 三つの拘束条件

$N, N^\mu, \Lambda^k$  は力学変数ではなく、下の三つの量は拘束条件となる。

$$\mathcal{D}[N^\mu] := \int_{\Sigma} N^\mu \epsilon_{lm}^k F_{\mu\nu}^{lm} E_k^\nu d^3x = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \text{3次元微分同相変換不変性}$$

$$\mathcal{G}[\Lambda^k] := \int_{\Sigma} \Lambda^k D_\mu E_k^\mu d^3x = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \text{局所SU(2)変換不変性}$$

$$\mathcal{S}[N] := \int_{\Sigma} \frac{1}{2} N (F_{\mu\nu}^{lm} + (\gamma^2 + 1) K_{[\mu}^l K_{\nu]}^m) E_l^\mu E_m^\nu d^3x = 0$$

$\longleftrightarrow$  一般時径数変換不変性(Wheeler de Witt eq. or Hamiltonian constraint)

$D_\mu, F_{\mu\nu}^{lm}$  はそれぞれAに対する共変微分及び曲率。 $K_\mu^l$  は外曲率。



**三つの拘束条件(=対称性)によって完全に規定。**

# 量子化

拘束条件に対応する演算子を作り、その作用が

$$\hat{D}[N^\mu] |\psi\rangle = 0 \quad \hat{G}[\Lambda^k] |\psi\rangle = 0 \quad \hat{S}[N] |\psi\rangle = 0$$

あとで

を満たすような状態ベクトルを寄せ集めて物理的Hilbert空間を作る。

Aを対角化する表式では波動汎関数  $\Psi[A]$  として、

$$\hat{A}_\mu^i(\vec{x})\Psi[A] = A_\mu^i(\vec{x})\Psi[A] \quad \hat{E}_j^\nu(\vec{x})\Psi[A] = i\hbar \frac{\delta}{\delta A_\nu^j(\vec{x})}\Psi[A]$$

$\hat{G}[\Lambda^k]\Psi[A] = 0 \quad \longrightarrow \quad \Psi[A]$  が局所SU(2)ゲージ変換で不変。

$\hat{D}[N^\mu]\Psi[A] = 0 \quad \longrightarrow \quad \Psi[A]$  が3次元微分同相変換で不変。

# Spin network basis: SU(2)不変性

spin network: node  $n$  とそれを結ぶ link  $l$  からなるグラフ

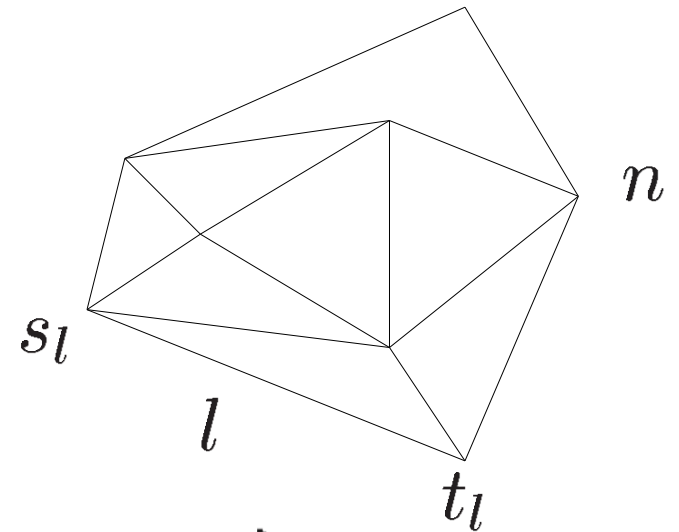
各node にはSU(2) 不変テンソルが、各link には SU(2)既約表現を表す半整数が付属している。

spin network 基底:

$$|s\rangle = \otimes_l |l, j_l\rangle \otimes_n i_n$$

ここで、 $|l, j_l\rangle$  は

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle A | l, j_l\rangle = R^{(j_l)}(h_l) \\ h_l = \mathcal{P} \exp\left(\int_l A^i \tau_i\right) \quad \text{SU(2) parallel transport} \\ R^{(j_l)}(h) \text{ は } h \text{ の spin-} j \text{ 表現行列, } \tau_i \text{ は Pauli 行列。} \end{array} \right\} \text{ で定義された量。}$$



$\langle A | s\rangle$  はSU(2)変換不変な量となる。

# 3-diff invariance

s-knot基底と呼ばれる基底を、

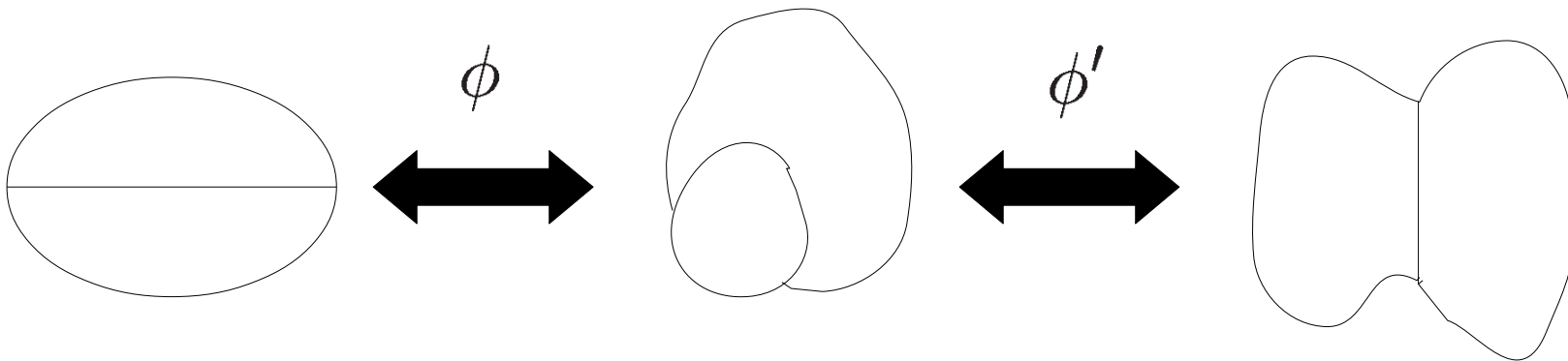
$$|[s]\rangle := \sum_{\phi} U_{\phi} |s\rangle$$

$\phi$  は3次元微分同相変換で、  
 $U_{\phi}$  はそのspinnetwork 基底に対する作用。  
和はあらゆる微分同相変換について取る。

と定義する。明らかに、

$$U_{\phi'} |[s]\rangle = |[s]\rangle$$

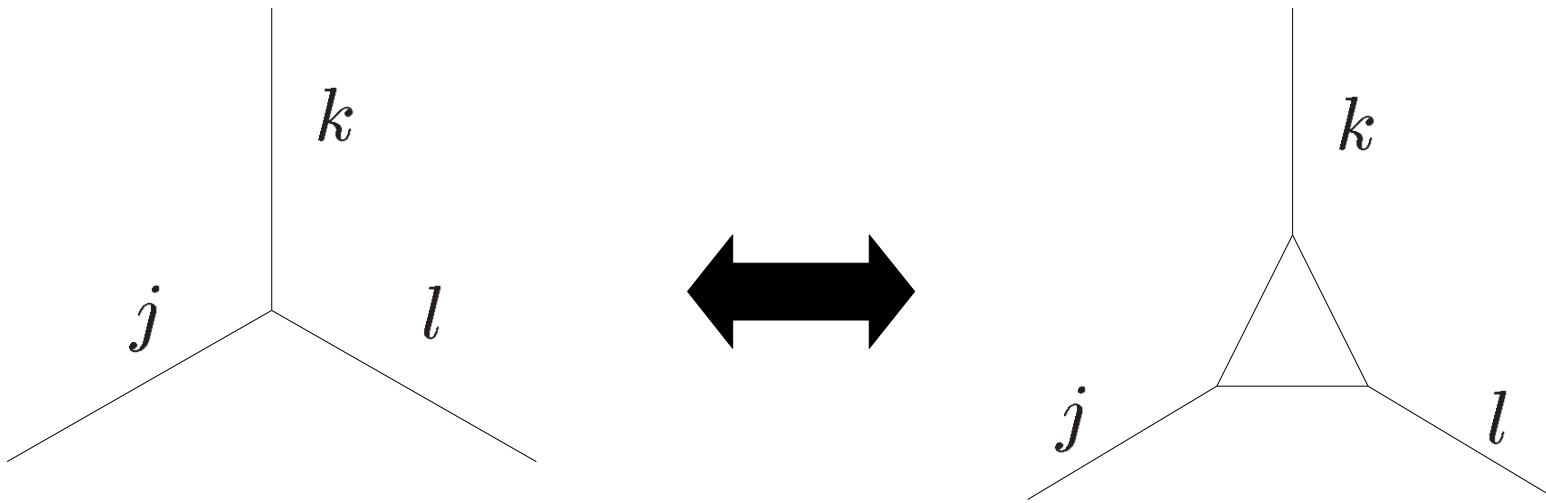
すなわち、s-knot 基底は3次元微分同相変換の元で不変。



s-knot 基底により張られる空間  $\mathcal{H}_{LQG}$  は2つの拘束条件を満たす。

# LQG dynamics

$\hat{S}[N]$  は spin net work 基底に対する演算子として以下のような作用をする。



形式的にはLQGの遷移振幅は

$$\langle s | s' \rangle_{Phys} := \langle s | \mathcal{P} | s' \rangle$$

と書ける。PはHamiltonian constraintの解空間への射影演算子である。

一般に、この拘束条件について解くことは困難である



# spinfoam

二つのspin network の間の遷移振幅は、それを境界とするグラフ『spinfoam』について遷移振幅を与えて足し合わせることで求められる。

spinfoam  $\sigma$  : vertex  $v$  , edge  $e$  ,face  $f$  を持つグラフ。

各edge にはSU(2)不変テンソルが、各faceには SU(2)既約表現を表す半整数が付属。

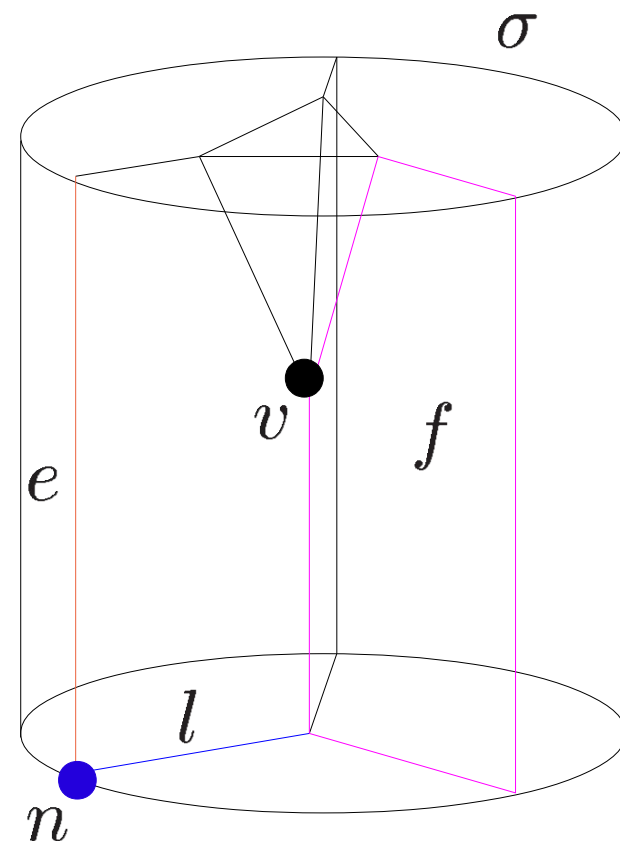
遷移振幅は一般的に

$$Z(s, s') = \sum_{\partial\sigma = s \cup s'} \omega(\sigma) \sum_{j_f, i_e} \prod_v A_v(j_f, i_e)$$

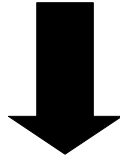
と書ける。

$\omega(\sigma)$  は重み。

$A_v$  を定めてやることでLQG dynamics を表現する spinfoam model が決定する。



他のさまざまな量子重力理論から計算される遷移振幅との対応や boundary state に対する要請



spinfoam  $C$  に対して

$$Z_C(h_l) = \int_{SL(2,\mathbb{C})} dg_{ev} \int_{SU(2)} dh_{ef} \sum_{j_f} \prod_f d_{j_f} \chi^{\gamma_{j_f}, j_f} \left( \prod_{e \in \partial f} g_{ef}^{\epsilon_{ef}} \right) \prod_{e \in \partial f} \chi^{j_f}(h_{ef})$$

$$g_{ef} = \begin{cases} g_{es_e} h_{ef} g_{et_e}^{-1} \\ \text{For internal edge} \\ \\ h_l \in SU(2) \\ \text{For boundary edge = link} \end{cases}$$

$j \in \frac{\mathbb{N}}{2} \quad d_j = 2j + 1$   
 $\chi^{\gamma_{j_f}, j_f} \chi^{j_f}$  は  $SL(2,\mathbb{C}), SU(2)$  既約表現の指標。  
 $\epsilon^{ef}$  はグラフの向き付けから定まる符号。

**SU(2) parallel transport**

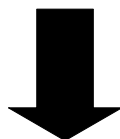
$h_l$  + boundary spin network  $\longleftrightarrow$  LQG Hilbert space  $\mathcal{H}_{LQG}$

# 問題提起

正準量子化の段階において、 $SO(3,1)$  gaugeの内一部を固定した (time gauge)。



GRの持つ $SO(3,1)$ 不変性を表現しきれない。



遷移振幅の一般化によってこの不変性を取り出す。

key point

$$SO(3,1) \simeq SL(2, \mathbb{C})$$

$SL(2, \mathbb{C})$ 指標の中の $SU(2)$ 元は行列として自然に $SL(2, \mathbb{C})$ に埋め込まれている。

➡ ゲージ固定と解釈

# Lorentz共変性

timelike unit vector  $x$  に対して、それを不変にする  $SU(2)$  に同型な  $SL(2, \mathbb{C})$  の部分群が一つ定まる。

$$h_x = x(h) \in SU(2)_x \subset SL(2, \mathbb{C})$$

行列群としての埋め込みを timelike unit vector  $x_0 = (1, 0, 0, 0)$

に対応させれば、 $x$  はある Lorentz 変換と 1 対 1 に対応し、

$$h_x = \Lambda_x h \Lambda_x^{-1} \quad \Lambda_x \in SL(2, \mathbb{C})$$

これを、ゲージの取り方と対応させる。

また、 $SL(2, \mathbb{C})$  parallel transport に対するゲージ変換の形と対応させて、

$$h_{xx'} = \Lambda_x h \Lambda_{x'}^{-1} \in SL(2, \mathbb{C})$$

なる埋め込みを考えることができる。

# 遷移振幅の一般化

2-complexの各edgeに対して任意のtimelike unit vector  $x_e$  を対応させ、遷移振幅を一般化する。

$$\tilde{Z}_{C, x_e}(h_l) = \int_{SL(2, \mathbb{C})} dg_{ev} \int_{SU(2)} dh_{ef} \sum_{j_f} \prod_f d_{j_f} \chi^{\gamma_{j_f, j_f}} \left( \prod_{e \in \partial f} g_{ef}^{\epsilon_{ef}} \right) \prod_{e \in \partial f} \chi^{j_f}(h_{ef})$$

same as above

$$g_{ef} = \begin{cases} g_{es_e}(h_{ef}) x_e g_{et_e}^{-1} & \text{For internal edge} \\ (h_l)_{x_{s(l)} x_{t(l)}} & \text{For boundary edge = link} \end{cases}$$

**性質1:**  $\tilde{Z}_{C, x_e}(g_l)$  はinternal edgesのLorentz変換で不変。

**性質2:** boundaryのLorentz変換に対して、

$$\tilde{Z}_{C, \Lambda_n x_n}(h_l) = \tilde{Z}_{C, x_n}(\Lambda_{s(l)} h_l \Lambda_{t(l)}^{-1})$$

※SL(2, C) parallel transport に 起こるゲージ変換と一致。

# 結論

遷移振幅の一般化によってあらわれる二つの性質

1: boundary 以外の場所での Lorentz 不変性

→ 理論の dynamics が Lorentz 不変であることの反映

2: boundary での Lorentz 共変性

→ LQG Hilbert space に  $SL(2, \mathbb{C})$  作用が自然に現れているように解釈できる。

この遷移振幅の一般化によって、物理的にもっともらしい局所 Lorentz 変換性が LQG に現れる。

LQG の遷移振幅の妥当性をこの性質が補強している。