Kaluza-Klein理論におけるブラックホール解

大阪市立大学理学研究科宇宙物理・重力研究室M１
中村晴貴

近年、超紐理論などの４つの力を統一するために４次元以上の時空を仮定する理論が盛んに研究されている。そこで、高次元時空の性質を調べることは重要である。最も古くからある理論の一つとして、通常の４次元時空の他にもう一つ、コンパクト化された余剰次元を持つ５次元時空を考えるKaluza-Klein理論がある。この理論では５次元Einstein方程式の真空解が、４次元時空上のEinstein-Maxwell-Dilaton理論の解として解釈することができる。

特に５次元時空中では特異点のない解として知られるGPSモノポール解など、Kaluza-Klein理論でアインシュタイン方程式の解を考え、定常、球対称で漸近的平坦な構造を持つブラックホール解の性質について発表する。

1.Kaluza-Klein Theory

extra dimension方向にKilling vector ∂_y が存在する時空を考える。metricは

$$ds^2 = e^{\frac{4\kappa\sigma}{\sqrt{3}}}(dy + 2\kappa A_\mu dx^\mu)^2 + e^{-\frac{2\kappa\sigma}{\sqrt{3}}} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{1}$$

で表される。このmetricを用いて５次元のEinstein actionを考えると

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{16\pi\hat{G}_5}\int d^5x\sqrt{-\hat{g}}\hat{R} \\ &= -\int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{R}{4\kappa^2} - \frac{1}{4}e^{2\kappa\sqrt{3}\sigma}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\sigma\partial_\nu\sigma\right) \end{aligned} \tag{2}$$

このように５次元のEinstein actionは４次元の重力場、電磁場、スカラー場のactionで書ける。

2.Charged black hole

Kaluza-Klein Theoryで５次元のEinstein方程式の真空解を考える。最も簡単なものはBlack string解で４次元ではSchwarzschild解に一致する。また、４次元でchargeを持つblack hole解はBlack string解をextra dimension方向へLorentz boostすることで得られる。

Black string の metric は

$$ds^2 = -(1-\frac{2m}{r})d\hat{t}^2 + (1-\frac{2m}{r})^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2 + dy^2 \tag{3}$$

この解を extra dimension 方向へ Lorentz boost する。

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1-\frac{2m\cosh^2\alpha}{r}\right)dt^2 + \left(1+\frac{2m\sinh^2\alpha}{r}\right)dy^2 \\ &- \frac{4m\cosh\alpha\sinh\alpha}{r}dydt + \left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \end{aligned} \tag{4}$$

ここで、metric を次のようにして Kaluza-Klein form に変形する。

$$e^{\frac{4\sigma}{\sqrt{3}}} = \left(1+\frac{2m\sinh^2\alpha}{r}\right) \tag{5}$$

$$A_t = \frac{m\cosh\alpha\sinh\alpha}{\kappa(r+2m\sinh^2\alpha)} \tag{6}$$

このとき、4 次元の metric $g_{\mu\nu}$ は $q = 2m\cosh^2\alpha$ とすると

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + R^2(r)d\Omega^2 \tag{7}$$

$$f(r) = \frac{r-2m}{\sqrt{r^2+(q-2m)r}}, R^2(r) = r\sqrt{r^2+(q-2m)r} \tag{8}$$

この 4 次元の解は Electrically-Black hole 解になっていて、$r = 2m$ が event horizon で $r = 0$ が特異点になっているような解である。5 次元の Black string 解も $r = 2m$ に event horizon、$r = 0$ に特異点を持つ時空であったので、dimensional reduction と Lorentz boost はそれらの位置を変えない。また、Reissner-Nordstrom black hole と違って inner horizon を持たず、特異点は Schwarzschild black hole のように spacelike である。

ここまでは Electrically-charged black hole について考察してきたが、これから Magnetically-charged black hole について考える。まず次の変換を考える。

$$\sigma \to -\sigma \qquad e^{2\sqrt{3}\kappa\sigma}F_{\mu\nu} \to {}^*F_{\mu\nu} \qquad g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} \tag{9}$$

ここで $*$ の operator は hoge の star operator である。

この変換の下で action の式 (2) は不変であるので、そこから導かれる運動方程式も変わらない。ゆえに Electrically-charged solution にこの変換を行えば Magnetically-charged solution を得ることができる。またこの変換の下では 4 次元の metric は変化しないので二つの charged solution は同じ 4 次元時空の構造を持つ。

二つの解ををわかりやすく区別するために$p=2m\cosh^2\alpha$とおくと変換(9)より

$$e^{-\frac{4\sigma}{\sqrt{3}}}=\left(1+\frac{p-2m}{r}\right) \tag{10}$$

$$A_\phi=P(1-\cos\theta) \tag{11}$$

ここで

$$P^2=\frac{p(p-2m)}{4} \tag{12}$$

このとき5次元のmetricは式(1)より

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1+\frac{p-2m}{r}\right)^{-1}[dy+P\cos\theta d\phi]^2 \\ &- \left(1-\frac{2m}{r}\right)dt^2+\frac{1+\frac{p-2m}{r}}{1-\frac{2m}{r}}dr^2+r^2\left(1+\frac{p-2m}{r}\right)d\Omega^2 \end{aligned} \tag{13}$$

と書ける。この解は5次元の解であるがBlack string解とは異なる解である。

この解のextremal limit:m=0を考える。metricは

$$ds^2=\left(1+\frac{p}{r}\right)^{-1}[dy+P\cos\theta d\phi]^2-dt^2+\left(1+\frac{p}{r}\right)dr^2+r^2\left(1+\frac{p}{r}\right)d\Omega^2 \tag{14}$$

この極限では4次元のmetricは$r=0$の特異点は存在したままであるが、5次元のmetricは次の座標変換を行うことで取り除くことができる。

$$\chi=\frac{y}{2P} \qquad \rho=2\sqrt{pr} \tag{15}$$

座標変換を行い、metricを$=0$の近くで展開すると

$$ds^2\simeq -dt^2+d\rho^2+\frac{\rho^2}{4}\left([d\chi+\cos\theta d\phi]^2+d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{16}$$

このmetricはχが周期4πを持つときMinkowski metricになっていて$r=0$近くは平坦な時空である。$r=0$以外はいたる所正則な解であるのでこのmetricで表される時空はどこにも特異点を持たない。このような解はGPS monopole solutionとして知られている。

3.Summary

Kaluza-Klein Theoryにおいて5次元のEinstein方程式の真空解を考え、effectiveに現れる4次元時空でBlack hole解を得た。このようにして得た解は通常の4次元時空のEinstein-Maxwell系で考えるBlack hole解とは異なる性質を持つ。また、5次元でnonsingularなmonopoleの解が存在することがわかった。

4.references

[1]G. W. Gibbons, D. L. Wiltshire, Annals Phys. 167 (1986) 201.
[2]Gary T. Horowitz, Toby Wiseman, arXiv:1107.5563[gr-qc]