

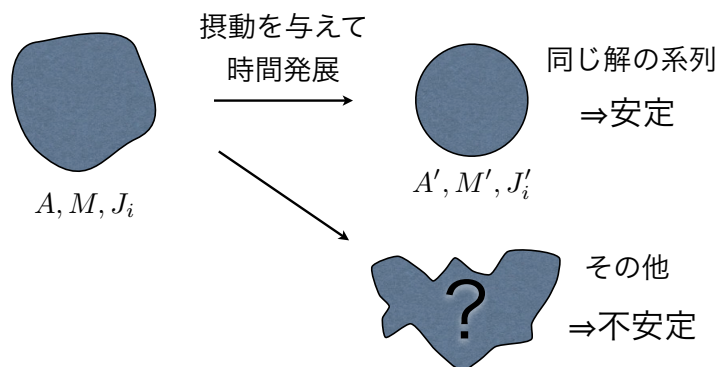
1 ブラックホール不安定性と局所ペンローズ不等式

この発表は Black hole instabilities and local Penrose inequalities(Pau Figueras, Keiju Murata and Harvey S. Reall)[arXiv:1107.5785v2 gr-qc] のレビュー発表である。

1.1 概要

種々の高次元ブラックホールは線形摂動による議論で不安定であることが知られている。しかしながら、高次元回転ブラックホールに対する線形摂動方程式の導出は非常に複雑であり困難である。そこでブラックホールの不安定性を局所ペンローズ不等式を用いて論ずる。安定なブラックホールは局所ペンローズ不等式に従う。したがって微小な摂動を表すブラックホールが局所ペンローズ不等式を満たさなければそのブラックホールは安定ではあり得ないことを利用する。今回は微小な摂動を表すブラックホールの初期条件を無摂動のブラックホールの共形変換によって構築する。コンパクト化された BlackString においては、Gregory-Laflamme 不安定性が現れる条件と局所ペンローズ不等式を破る条件がほぼ一致した。また Myers-Perry BlackHole における "高速回転" 不安定性の存在も示すことができた。さらに BlackRing についてこの手法を用いて "fat" な BlackRing が不安定であるということが示せた。一方 "thin" な BlackRing の回転対称性を保つ摂動に対する不安定性は確認されなかった。

1.2 はじめに



1.2.1 ブラックホールの安定性

ブラックホールをもつ時空に微小な摂動を与えて時間発展させたときにその時空がもとのブラックホールを持つ時空と同じ解の系列になった時、そのブラックホールはその摂動に対して安定であるといい、そうでない場合を不安定であるという。任意の微小な摂動に対してブラックホールが安定なとき、そのブラックホールは安定であるという。すなわち一つでも不安定なような摂動が存在すればそのブラックホールは不安定であるといえる。

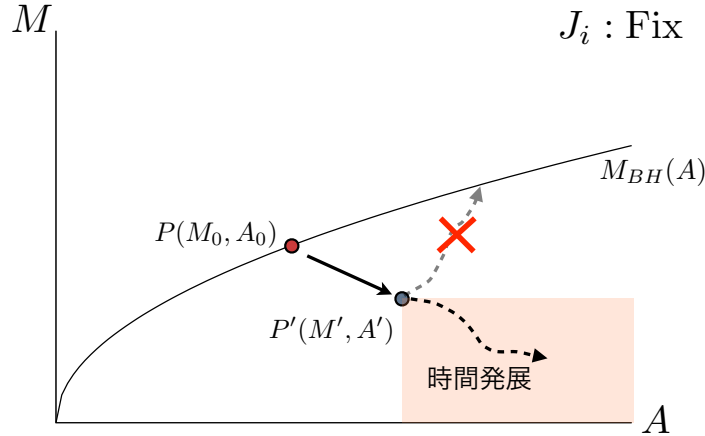
1.2.2 なぜブラックホールの安定性が

通常の時空は4次元であると考えられているが、超弦理論などの理論によって我々の時空はより高次元であるかもしれないという可能性が出てきた。こういった高次元の時空をとり扱うためには高次元の重力理論が必要であるが、高次元においても Einstein Equation が正しいという仮定のもと Black String, Myers Perry, Black Ring など様々な時空の解が得られている。しかしながら高次元においては4次元で成立するブラックホールの唯一性定理が成り立たないことが知られており、すなわち物理的過程においてどのようなブラックホールが生成されるかを知るのには容易ではない。そこで重要になるのがブラックホールの安定性である。不安定なブラックホールはいずれ安定なブラックホールに遷移すると考えられたため、そこからどういったブラックホールが生き残りうるのかが考えられるのだ。

高次元ブラックホールの安定性を調べる方法として、線形摂動方程式を解析する方法などがある。これらにより Black String の Gregory-Laflamme 不安

定性や Myers Perry BH の Ultra Spinning 不安定性などが見つかっている。この手法では安定性の必要十分条件が得られるというメリットがあるが一般に高次元ではこの線形摂動方程式を解析することは非常に困難であり、限られた例のみが見つかっているのみである。今回はこの手法にかわり、不安定性の十分条件を比較的容易に求めることができる手法としての局所ペンローズ不等式を用いた方法の概略を紹介する。詳しい議論については本レビューの原論文を参照してほしい。

1.3 局所ペンローズ不等式



ここでは静的で漸近的平坦、軸対称なブラックホールを考える。一般に静的なブラックホールの角運動量 J_i と質量 M 、表面積 A は独立ではなく解の系列ごとにそれらは状態空間のなかで曲面を描く。上図の曲線は角運動量一定面における曲面の断面を模式的に表しており、解の系列に含まれる時空はこの曲線上の点として表される。さて状態 $P(M_0, A_0)$ にあった時空の Time Slice が角運動量、真空を保存するような摂動によって $P'(M', A')$ で表される Time Slice に移ったとする。するとその Time Slice を初期状態として時空ははし行く。このとき時間発展において一般にブラックホールの質量 (Bondi mass) は減少し、ブラックホールの表面積は増大することを注意すると時空の時間発展は色のついた領域にのみ到達しうることがわかる。さてもし摂動によって時空の Time Slice が図でいうところの曲線の下側、すなわち $M' - M_{BH}(A') < 0$ を満たす領域に移ったとすると、その後時間発展において元の解の系列には戻り得ないことが分かる。即ち $M' - M_{BH}(A') < 0$ を満たすような摂動が存在すれば、そのブラックホールは不安定であるといえるのである。

この条件をより扱いやすくするべく、摂動パラメータに対して展開してやると

$$\begin{aligned}
 M' - M_{BH}(A') &= M_0 - M_{BH}(A_0) \\
 &+ \dot{M} - \frac{T}{4} \dot{A} \\
 &+ \ddot{M} - \frac{T}{4} \ddot{A} - \frac{\dot{M}^2}{4T c_J} \\
 &+ \dots
 \end{aligned}$$

となる。ここで \cdot は摂動の次数を意味する。実はこの式の 0 次と 1 次は消え

ることが示せる。(0次は定義より明か、1次はBH熱力学の第一法則より示される)したがって2次の項が本質的であり

$$Q \equiv \ddot{M} - \frac{T}{4}\ddot{A} - \frac{\dot{M}^2}{4Tc_J} < 0 \quad (1)$$

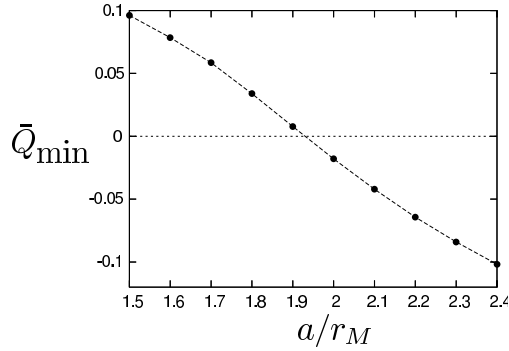
となるような摂動が存在すればそのブラックホールは不安定である。 $Q \geq 0$ を局所ペンローズ不等式といい、すなわちこれを破る時空の摂動は不安定であることがいえるのである。

以上が局所ペンローズ不等式を用いたブラックホールの不安定性議論の概要である。原論文ではより厳密な議論により結論を得ている。最後に実際の適用例のいくつかを引用する。

1.4 適用例

1.4.1 Single Spinning Myers Perry BH

例1: Singly Spinning Myers-Perry BH

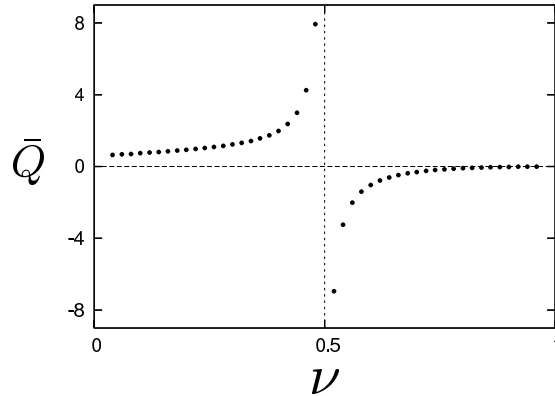


d	6	7	8	9	10	11
a/r_M	1.933	2.380	2.635	2.803	2.934	3.048
a/r_M (Dias et al.)	1.572	1.714	1.770	1.792	1.795	1.798

例1は局所ペンローズ不等式による手法を Single Spinning Myers Perry BH に適用したものである。この図は特に6次元のものについてある適当な摂動を与えたときの Q の値のグラフであり、横軸は Spin の大きさを表す量である。視て分かる通り Spin がある大きさを越えたところから Q の値が負になっていることが分かる。これは即ち十分大きな Spin を持った Single Spinning Myers Perry BH が不安定であることを示している。この”Ultra Spinning”不安定性は各次元についてみられ、それまとめたのが上の表である。表の二段目が今回得られた不安定性の臨界の Spin であり3段目は線形解析により得られた不安定性の臨界値である。とくに線形解析的による値は必要十分な値であるが今回の手法で得られた結果はこの範囲に入っており Consistent であることが確認できる。

1.4.2 Single Spinning Black Ring

例2: Singly Spinning Black Ring



$0 < \nu < 1/2$ “thin” ring

$1/2 < \nu < 1$ “fat” ring

例2は局所ペンローズ不等式による手法を5次元のSingle Spinning Black Ringに適用したものである。図は適当な摂動を与えたときの Q の値であり ν はBlack Ringの解を特徴づけるパラメータである。 $0 < \nu < \frac{1}{2}$ のときを”thin”なring、 $\frac{1}{2} < \nu < 1$ のときを”fat”なringとよぶ。上図のとおり”fat”なmodeにおいてBlack Ringは不安定であることが確認された。

1.5 まとめ

局所ペンローズ不等式を用いた方法でブラックホールの不安定性の十分条件が調べられた。実際この手法をSingle Spinning Myers Perry BHに適用したところ線形解析によって得られたものとConsistentな結果が得られた。今回は紹介しなかったが原論文ではBlack StringのGregory-Laframme不安定性についても本手法を用いて確認され、またその臨界値は線形解析によって得られたものとほぼ一致するという興味深い結果が得られている。またこの手法を用いて今までその不安定性がきちんと確かめられていなかったBlack Ringについても、その”fat”なmodeの不安定性が本手法により始めて確認された。”thin”なmodeについては今回は不安定性は確認されなかった。原論文にはこの他にもDouble Spinning Myers PerryやDouble Spinning Black Ringに本手法を適用し、それぞれ不安定なmodeを得ている。