一般相対論的
三体問題の三角解

弘前大学 理工学研究科
山田 慧生

共同研究者：市田匠, 浅田秀樹

発表の流れ

- 三体問題 (Newton) の正三角解
- 一般相対論的三体問題
- 一般相対論的三体問題の三角解
- まとめ

発表の流れ

- 三体問題 (Newton) の正三角解
- 一般相対論的三体問題
- 一般相対論的三体問題の三角解
- まとめ

三体問題

三体問題

＋

Newtonの重力法則

一般に可積分でない

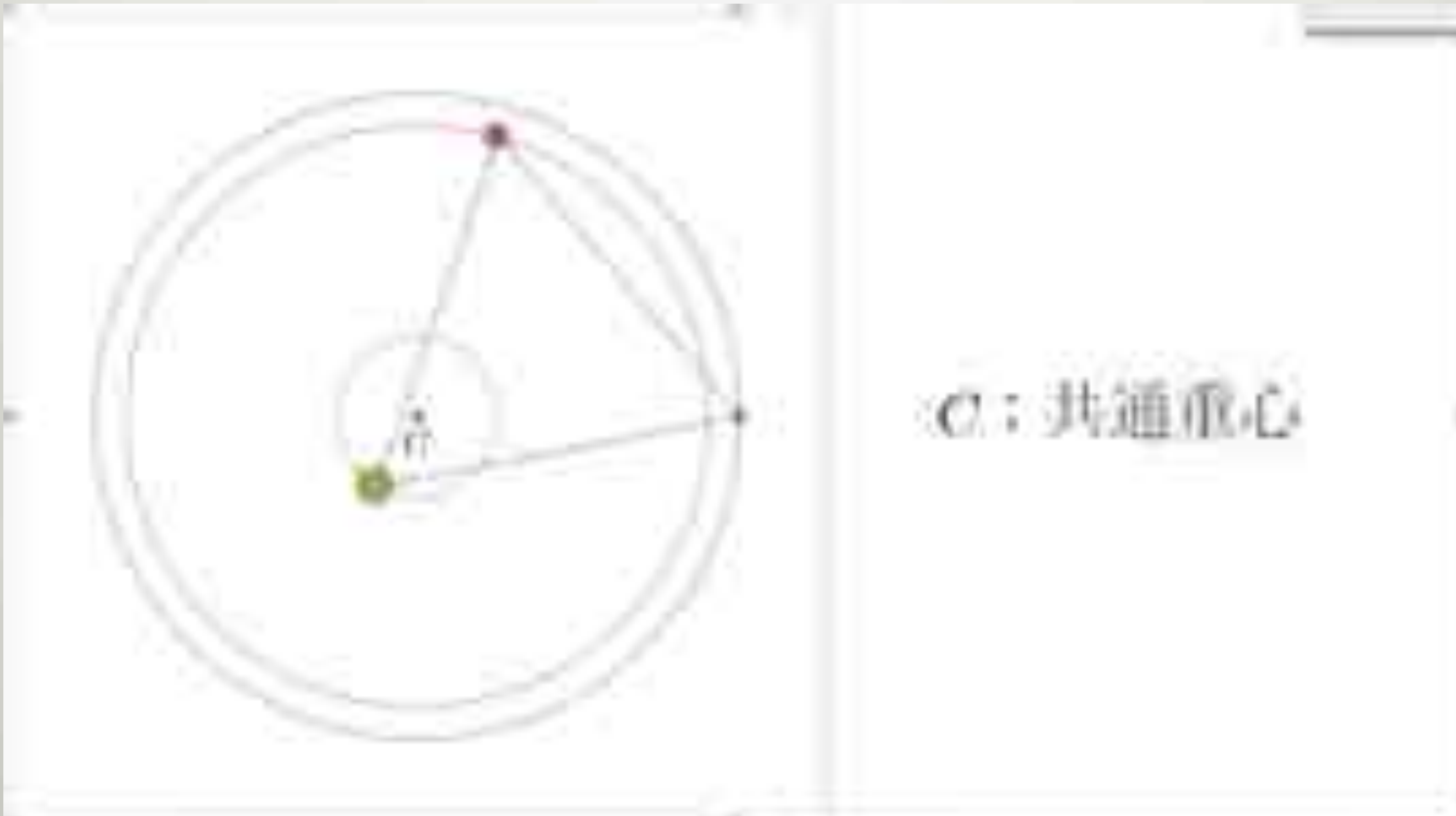
(Poincaréが証明)

ただし, 特殊解はある

Eulerの直線解 (1765),　Lagrangeの正三角解 (1772)

正三角解

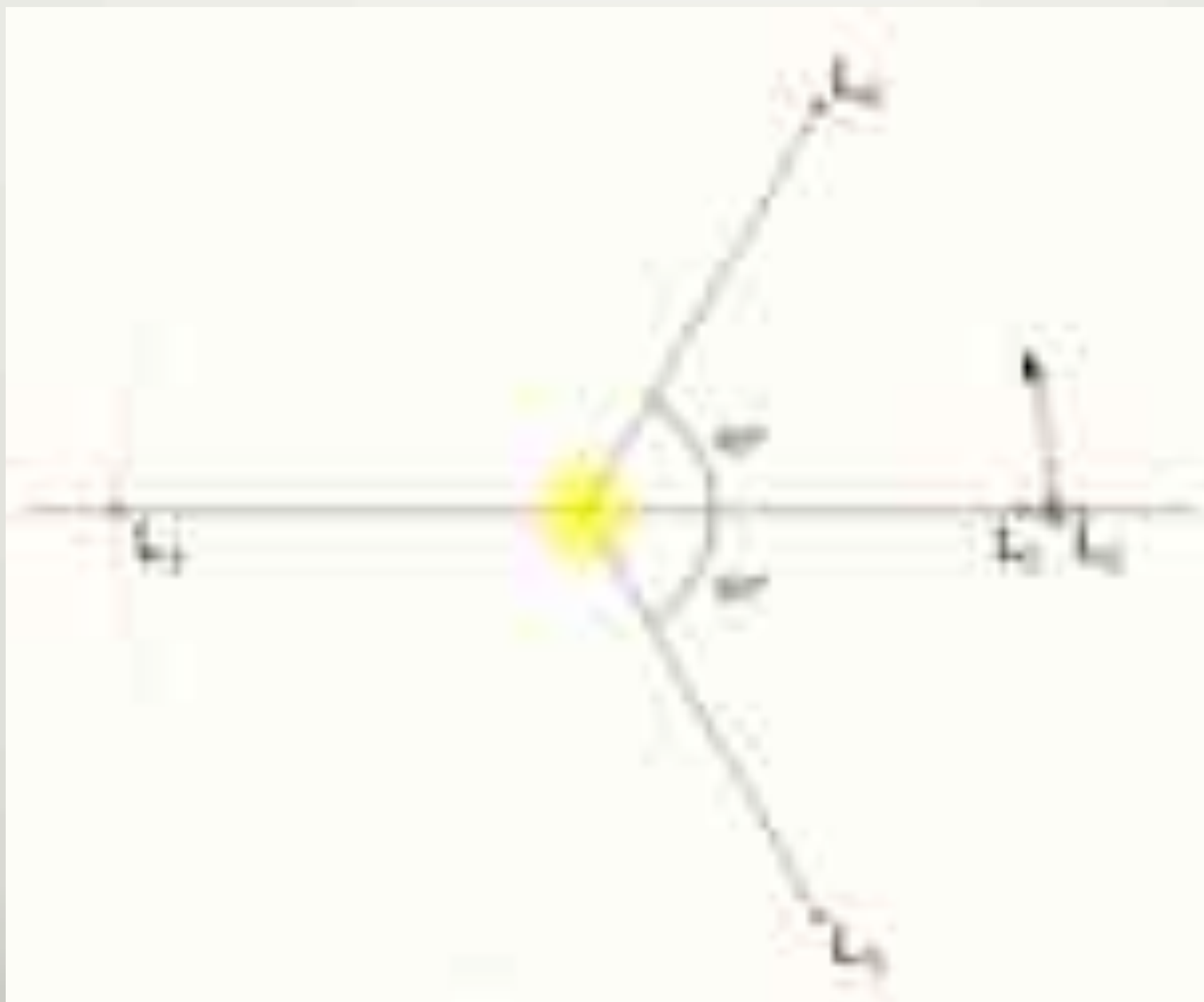
正三角解は天体が正三角の頂点に位置しながら円運動する



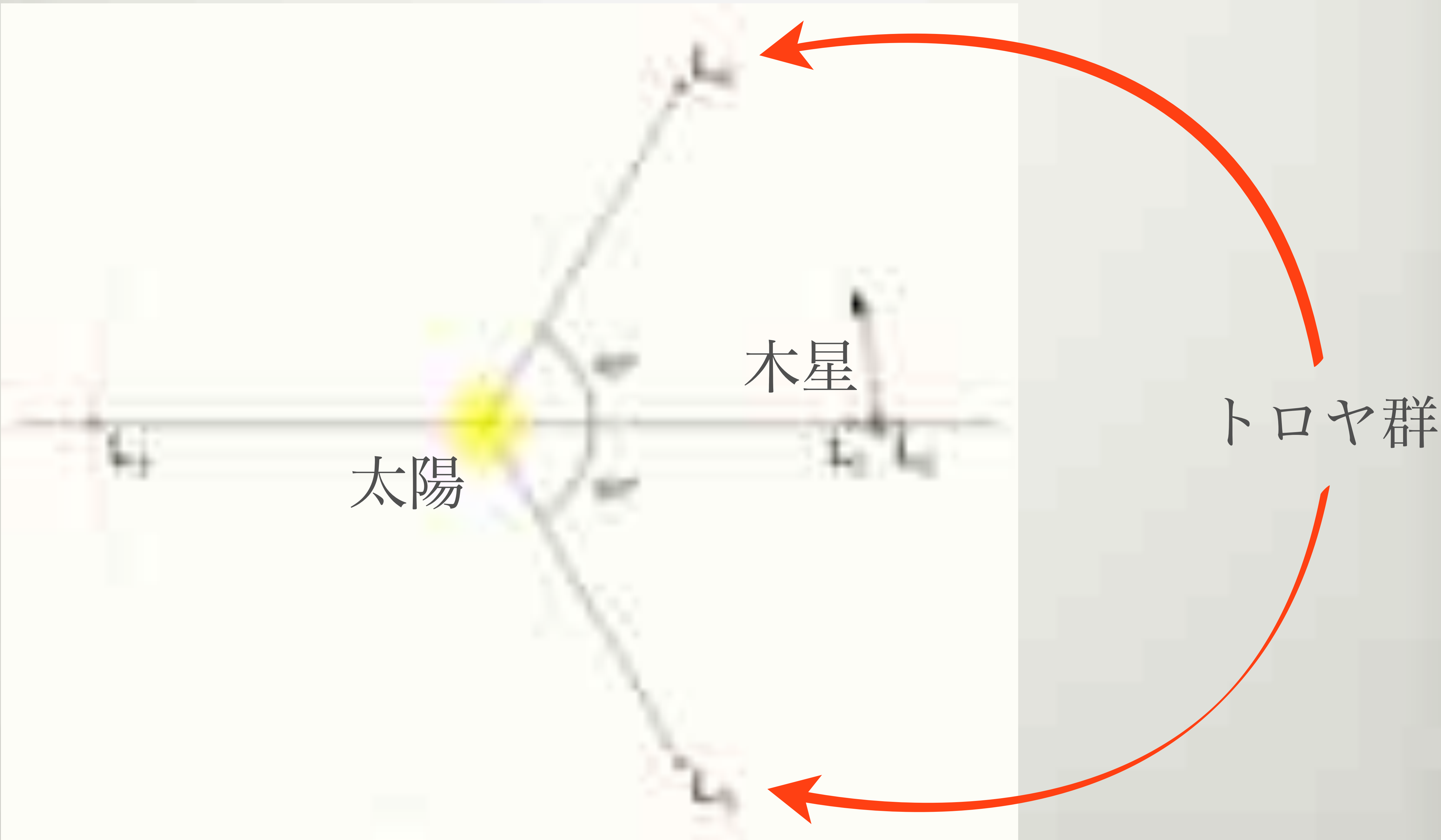
Lagrange点

制限三体問題の場合

Lagrange点のL4，L5として知られる



Lagrange点

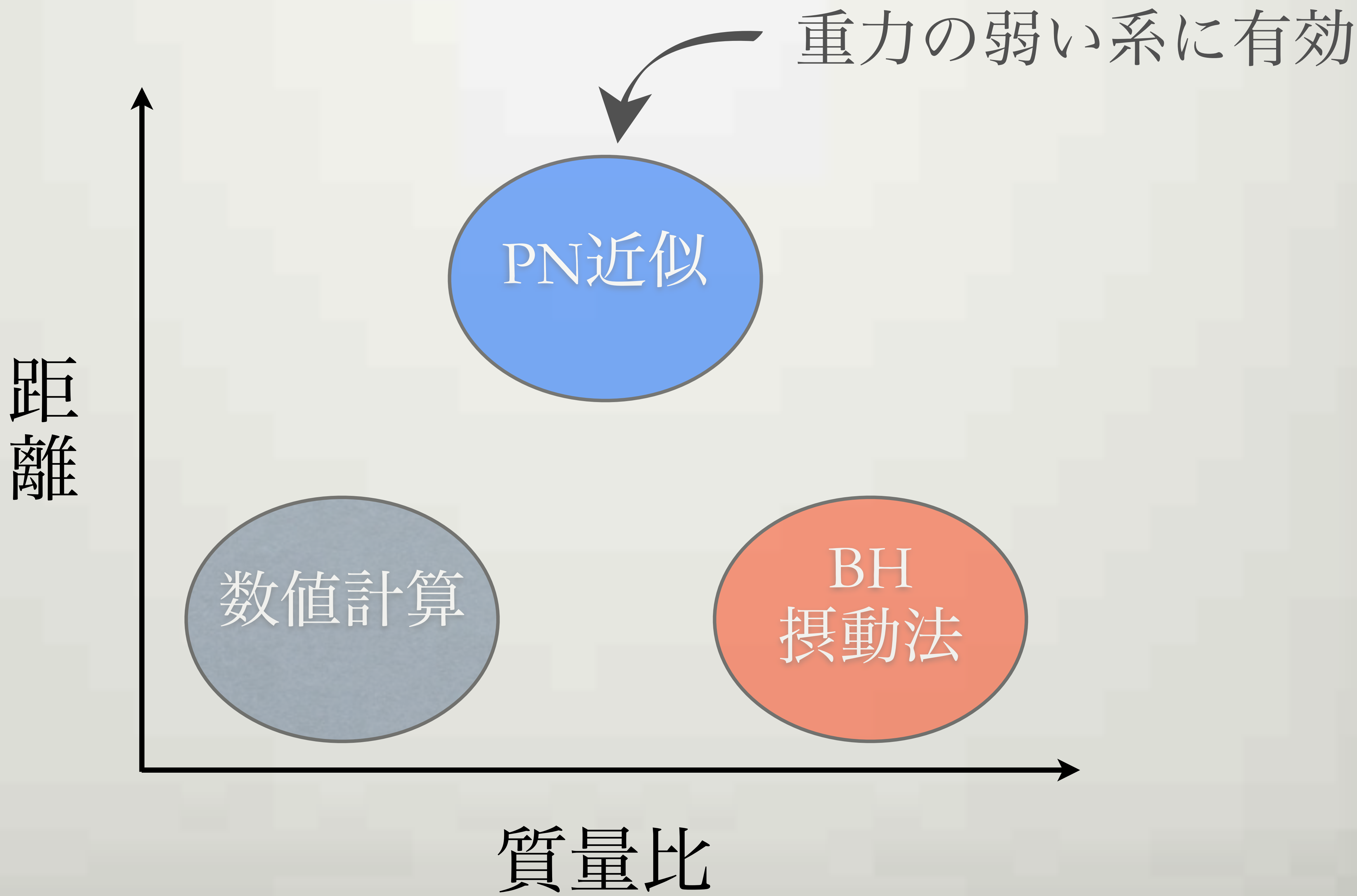


正三角解に一般相対論の効果を取り入れる

発表の流れ

- 三体問題の正三角解
- 一般相対論的三体問題
- 一般相対論的三体問題の三角解
- まとめ

Post-Newton近似



Post-Newton近似

仮定：$\varepsilon = \left(\frac{v}{c}\right)^2 \sim \frac{GM}{rc^2} \ll 1$

v：天体の運動速度, c：光速, r：天体間距離, M：天体質量

Einstein方程式を展開

GRで計算される量

$$Q = Q_0 + Q_1\varepsilon + Q_2\varepsilon^2 + \cdots$$

相対論による補正

Newton理論で計算される量に等しい項

ε の一次まで採用 = 1PN近似

EIHの運動方程式

1PN近似での多体系の運動方程式

Einstein-Infeld-Hoffmann (EIH) の運動方程式

Newton理論と等しい量

(GR的な) 質量による補正

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2\boldsymbol{r}_K}{dt^2} = & \sum_{A\neq K} \boldsymbol{r}_{AK}\frac{Gm_A}{r_{AK}^3}\Bigg[1 - 4\sum_{B\neq K}\frac{Gm_B}{c^2 r_{BK}} - \sum_{C\neq A}\frac{Gm_C}{c^2 r_{CA}}\left(1 - \frac{\boldsymbol{r}_{AK}\cdot\boldsymbol{r}_{CA}}{2r_{CA}^2}\right) \\
& + \left(\frac{\boldsymbol{v}_K}{c}\right)^2 + 2\left(\frac{\boldsymbol{v}_A}{c}\right)^2 - 4\left(\frac{\boldsymbol{v}_A}{c}\right)\cdot\left(\frac{\boldsymbol{v}_K}{c}\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{\left(\frac{\boldsymbol{v}_A}{c}\right)\cdot\boldsymbol{r}_{AK}}{r_{AK}}\right)^2\Bigg] \\
& - \sum_{A\neq K}\left[\left(\frac{\boldsymbol{v}_A}{c}\right) - \left(\frac{\boldsymbol{v}_K}{c}\right)\right]\frac{Gm_A\boldsymbol{r}_{AK}\cdot\left[3\left(\frac{\boldsymbol{v}_A}{c}\right) - 4\left(\frac{\boldsymbol{v}_K}{c}\right)\right]}{r_{AK}^3} \\
& + \frac{7}{2}\sum_{A\neq K}\sum_{C\neq A}\boldsymbol{r}_{CA}\frac{Gm_C}{r_{CA}^3}\frac{Gm_A}{c^2 r_{AK}}
\end{aligned}
$$

(GR的な) 速度による補正

一般にポテンシャルの勾配で表せない

GR的三体問題の正三角解

正三角という条件から (第一体の) 運動方程式は

$$-\omega^2 \boldsymbol{n}_1 = -\boldsymbol{n}_1 + g_{PN1}\boldsymbol{n}_1$$

ゼロになる必要

$$\boxed{+\frac{\sqrt{3}}{16}\frac{\nu_2\nu_3(\nu_2-\nu_3)}{\nu_2^2+\nu_2\nu_3+\nu_3^2}\Big[6+9\big(\nu_2+\nu_3\big)\Big]\varepsilon\boldsymbol{n}_{\perp 1}}$$

$$g_{PN1} = \frac{\varepsilon}{16(\nu_2^2+\nu_2\nu_3+\nu_3^2)} \times \Big[48(\nu_2^2+\nu_2\nu_3+\nu_3^2) - 2\boxed{(8\nu_2^3+7\nu_2^2\nu_3+7\nu_2\nu_3^2+8\nu_3^3)} + (16\nu_2^4+41\nu_2^3\nu_3+84\nu_2^2\nu_3^2+41\nu_2\nu_3^3+16\nu_3^4)\Big]$$

GR 的三体相互作用

ω : 角速度, $\nu_I \equiv m_I/M,\ M = \sum_I m_I\ (I=1,2,3)$

$\boldsymbol{n}_1 \equiv \boldsymbol{r}_1/|\boldsymbol{r}_1|,\ \boldsymbol{n}_{\perp 1} \equiv \boldsymbol{v}_1/|\boldsymbol{v}_1|$, $\boldsymbol{n}_{\perp 1}$ は $\boldsymbol{n}_1$ に垂直

GR的三体問題の正三角解

正三角という条件から (第一体の) 運動方程式は

$$-\omega^2 \boldsymbol{n}_1 = -\boldsymbol{n}_1 + g_{PN1}\boldsymbol{n}_1$$

ゼロになる必要

$$+\frac{\sqrt{3}}{16}\frac{\nu_2\nu_3(\nu_2-\nu_3)}{\nu_2^2+\nu_2\nu_3+\nu_3^2}\left[6+9\left(\nu_2+\nu_3\right)\right]\varepsilon\boldsymbol{n}_{\perp 1}$$

正三角配置で天体が運動方程式を満たすのは

- 三体の質量比が 1 : 1 : 1
- 三体の質量比が 0 : 0 : 1

1PNの重力場では任意の質量比に対する

正三角解が存在しない

GR的三体問題の正三角解

正三角解に代わる新たな平衡解はないのか

cf.
[E. Krefetz, Astron. J. **72**, 471 (1967)]
制限三体問題に対して

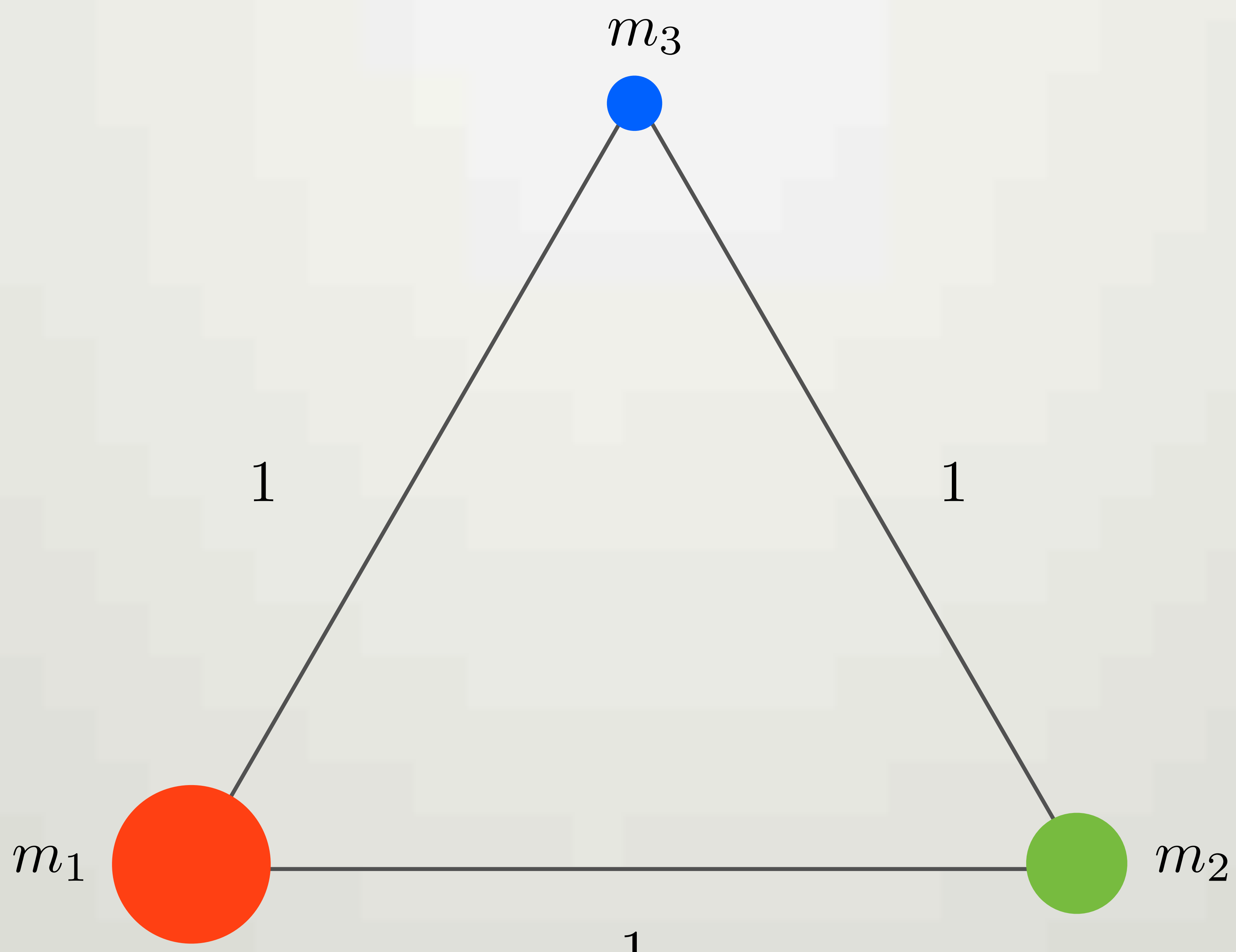
[N. Seto & T. Muto, PRD **81**, 203004 (2010)]
Krefetzの解の安定性等

作戦：天体の配置を正三角から1PNレベルで変更する

発表の流れ

- 三体問題の正三角解
- 一般相対論的三体問題
- 一般相対論的三体問題の三角解
- まとめ

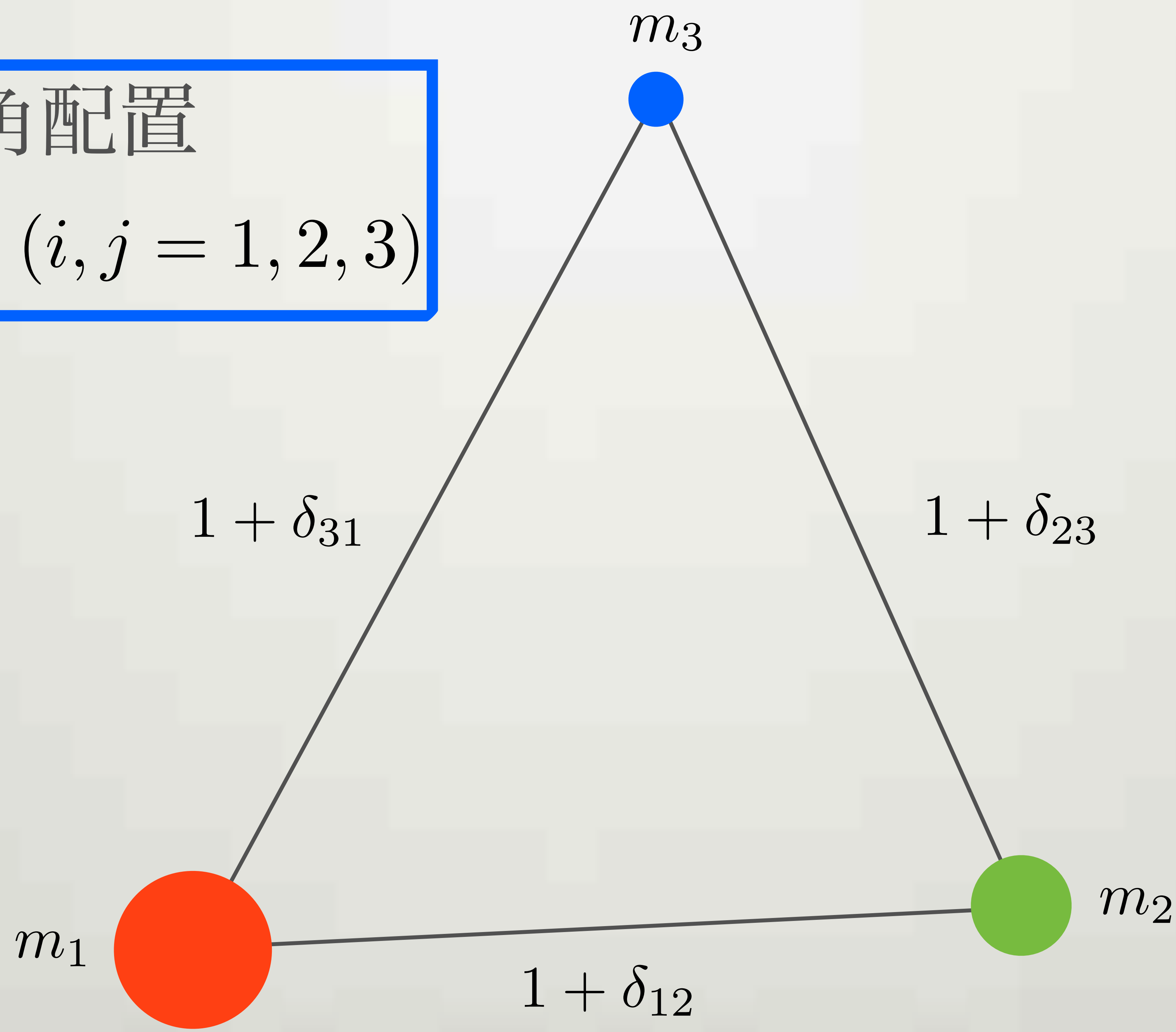
距離の補正



距離の補正

三角配置

$\delta_{ij} \sim 1\mathrm{PN} \quad (i, j = 1, 2, 3)$



$$\boxed{\delta_{12} + \delta_{23} + \delta_{31} = 0}$$

解が許される条件

(a) 各天体が運動方程式を満たす

3つ

(b) すべての天体の軌道周期が等しい $(T_1 = T_2,\ \ T_1 = T_3)$

2つ

独立な距離の補正 2つに対して, 条件が5つある

条件過多, 解くのは不可能に思える

解が許される条件

(a) 各天体が運動方程式を満たす

(b) すべての天体の軌道周期が等しい $(T_1 = T_2,\ \ T_1 = T_3)$

実は！

5つのうち2つの条件を満たす補正 δ_{ij} は

残りの3つを自動的に満たす

$\boxed{\text{独立な条件は2つ}}$

補正の導出

$$\omega^2 \boldsymbol{r}_{1N} = -\boldsymbol{r}_{1N} - 3(\nu_2\delta_{12}\boldsymbol{r}_{21N} + \nu_3\delta_{31}\boldsymbol{r}_{31N}) + \boldsymbol{\delta}_{\mathrm{EIH1}} + \mathrm{O(2PN)}.$$

$$\omega^2 \boldsymbol{r}_{2N} = -\boldsymbol{r}_{2N} - 3(\nu_3\delta_{23}\boldsymbol{r}_{32N} + \nu_1\delta_{12}\boldsymbol{r}_{12N}) + \boldsymbol{\delta}_{\mathrm{EIH2}} + \mathrm{O(2PN)}.$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{EIH1}} = \frac{\varepsilon}{16 r_{1N}}\Big\{&[48(\nu_2^2+\nu_2\nu_3+\nu_3^2) - 2(8\nu_2^3 + 7\nu_2^2\nu_3 + 7\nu_2\nu_3^2 + 8\nu_3^3) \\ &+ (16\nu_2^4 + 41\nu_2^3\nu_3 + 84\nu_2^2\nu_3^2 + 41\nu_2\nu_3^3 + 16\nu_3^4)]\boldsymbol{n}_{1N} \\ &+ 3\sqrt{3}\nu_2\nu_3(\nu_2-\nu_3)(5-3\nu_1)\boldsymbol{n}_{\perp 1N}\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{EIH2}} = \frac{\varepsilon}{16 r_{2N}}\Big\{&[48(\nu_3^2+\nu_3\nu_1+\nu_1^2) - 2(8\nu_3^3 + 7\nu_3^2\nu_1 + 7\nu_3\nu_1^2 + 8\nu_1^3) \\ &+ (16\nu_3^4 + 41\nu_3^3\nu_1 + 84\nu_3^2\nu_1^2 + 41\nu_3\nu_1^3 + 16\nu_1^4)]\boldsymbol{n}_{2N} \\ &+ 3\sqrt{3}\nu_3\nu_1(\nu_3-\nu_1)(5-3\nu_2)\boldsymbol{n}_{\perp 2N}\Big\},\end{aligned}$$

$$(\delta_{12} - \delta_{31}) = \frac{1}{8}(\nu_2 - \nu_3)(5 - 3\nu_1)\varepsilon,$$

$$(\delta_{23} - \delta_{12}) = \frac{1}{8}(\nu_3 - \nu_1)(5 - 3\nu_2)\varepsilon,$$

GR的三体問題の三角解

任意の質量比で三角解を許す距離の補正は

$$\delta_{12} = \frac{1}{24}[(\nu_2 - \nu_3)(5 - 3\nu_1) - (\nu_3 - \nu_1)(5 - 3\nu_2)]\varepsilon,$$
$$\delta_{23} = \frac{1}{24}[(\nu_3 - \nu_1)(5 - 3\nu_2) - (\nu_1 - \nu_2)(5 - 3\nu_3)]\varepsilon,$$
$$\delta_{31} = \frac{1}{24}[(\nu_1 - \nu_2)(5 - 3\nu_3) - (\nu_2 - \nu_3)(5 - 3\nu_1)]\varepsilon. \left(\nu_i = \frac{m_i}{M}\right)$$

[KY, H. Asada in prep.]

⇒ GR的三体問題の三角解

$\nu_3 \to 0$ の制限三体の極限で先行研究を再現

太陽系に対する応用

太陽系におけるLagrange点への補正 [m]

Planet	Sun-L4 (L5)	Planet-L4 (L5)
Earth	-0.00111	-923
Jupiter	-0.353	-923

+ 符号は距離の増加，- 符号は減少

発表の流れ

- 三体問題の正三角解
- 一般相対論的三体問題
- 一般相対論的三体問題の三角解
- まとめ

まとめ

- GR的三体問題は正三角解を持たない
- GR的三体問題に対する
  任意の質量比における三角解を導出した
- 三角解はSMBHやコンパクト連星の周りにも適用出来る

今後の課題

- 三角解の安定性
- 高次のPN近似

ご清聴ありがとうございました