重宇
32b

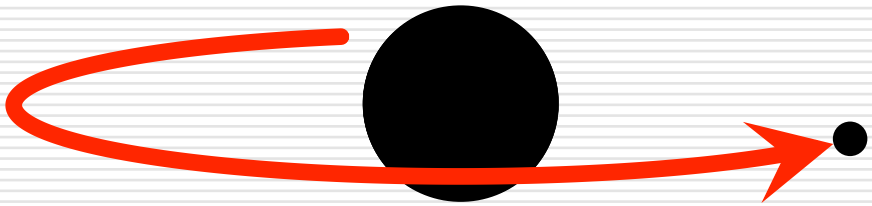
ブラックホールと回転リングがつくる重力場の構築

大阪大学　D1　佐野保道
共同研究者　田越秀行

2012年度 第42回天文・天体物理若手 夏の学校

目次

導入・目的



- ブラックホール(BH)摂動
  - BH質量より十分小さい質量をソースとする時空計量の摂動

$$g_{\alpha\beta} = g^{(0)}_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$$

- 「ブラックホール＋運動する質点」の摂動計量は重力波波形の計算に役立つ
  - しかし　Kerr時空(自転BH)での計算法は超難題！

- Kerr時空でも使える摂動計量の計算法を調べる

導入・目的

$$g_{\alpha\beta} = g^{(0)}_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$$

- Schwarzschild時空の場合なら $h_{\alpha\beta}$ を直接求める方程式が使えるが　Kerr時空の場合では使えない

- Kerr時空(自転BH)でも使える方法：
  Teukolsky方程式＋CCK形式　（1970年代）
  - 電磁気学のHertzポテンシャル を応用した方法
  - 実用例はまだ少なく
    実際の計算での技術的問題点を理解することが重要
    - Keidl et al. (2007)：Schwarzschild BH＋静止質点
    - Keidl et al. (2010)：Schwarzschild BH＋円軌道質点

問題設定

- Schwarzschild BH と 回転リング による重力場を時空計量の摂動問題として計算（良い練習問題）
  - Schwarzschild計量→ $$\mathrm{d}s^2 = -\frac{\Delta}{r^2}\mathrm{d}t^2 + \frac{r^2}{\Delta}\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2)$$
  - 定常・軸対称な問題 $$\Delta = r^2 - 2Mr$$

$$\boxed{g_{\alpha\beta} = g^{(0)}_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}}$$

- 回転リングのエネルギー運動量テンソル $T^{\alpha\beta}$ 測地線円軌道にある質点の集合として与える
  - m: リング静止質量（ $m \ll M$ ）
  - r_0: リング半径 $$T^{\alpha\beta} = \frac{m u^\alpha u^\beta}{u^t {r_0}^2}\delta(r - r_0)\delta(\cos\theta)$$
  - u^α : 回転の四元速度
    - 四元速度はリング半径で決まる（角速度 Ω ） $$\Omega = \sqrt{\frac{M}{{r_0}^3}}$$

方法：Teukolsky方程式＋CCK形式

- まず Weylスカラー ψ_4 を求める

$T_{\alpha\beta}$ リングのエネルギー運動量テンソル（摂動のソース）

変数分離可能な二階偏微分方程式

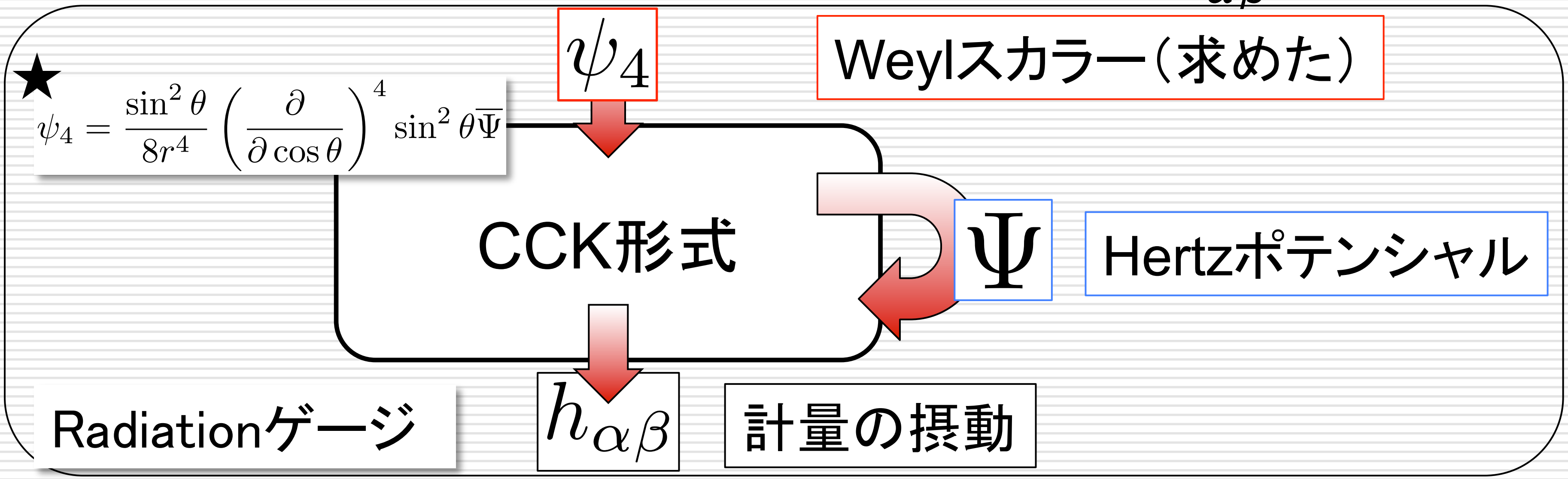
Teukolsky方程式

ψ_4 Weylスカラーの摂動

  - Weylテンソル： 曲率を表す四階テンソル
  - Weylスカラー： Weylテンソルの成分
    - 5つの独立な複素数（ψ_0, ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4）
      - ψ_0 と ψ_4 だけ摂動がTeukolsky方程式で解ける

方法：Teukolsky方程式＋CCK形式

- 次にHertzポテンシャル Ψ を介して $h_{\alpha\beta}$ を求める



$$\psi_4 = \frac{\sin^2\theta}{8r^4}\left(\frac{\partial}{\partial\cos\theta}\right)^4 \sin^2\theta\overline{\Psi}$$

- CCK形式： Chrzanowski (‘75), Cohen & Kegeles (‘79)
  計量の摂動 $h_{\alpha\beta}$ がHertzポテンシャルの二階微分で与えられるゲージ（Radiationゲージ）が存在する
  - →WeylスカラーはHertzポテンシャルの四階微分（★）
- (★)式の解であるHertzポテンシャルを求めればいい

問題点

★ $$\psi_4 = \frac{\sin^2\theta}{8r^4}\left(\frac{\partial}{\partial\cos\theta}\right)^4 \sin^2\theta\overline{\Psi}$$

- Weylスカラーから
  Hertzポテンシャルを求める段階 に困難がある
  - (★)式は四階偏微分方程式
  - 特解は簡単に求まるが　斉次解(積分定数に対応)の自由度がHertzポテンシャルに残る $\boxed{\Psi} = \boxed{\Psi_{\mathrm{P}}} + \boxed{\Psi_{\mathrm{H}}}$
  - 特解のみから計量の摂動 $h_{\alpha\beta}$ (またはWeylテンソル)を計算(Radiationゲージ)すると
    物理的に解釈できない結果が得られる
    - リング半径での不連続性(リングのある赤道面以外でも)
    - 遠方での振る舞い

問題点の解決(に向けて)

$$\boxed{\Psi} = \boxed{\Psi_{\mathrm{P}}} + \boxed{\Psi_{\mathrm{H}}}$$

- Hertzポテンシャルの斉次解のもつ自由度は
  ８つの複素定数で表される （Keidl et al. 2007）

- その一部には 物理的意味があり
  時空に質量と角運動量の摂動を与える
  - ➡ 回転リングがSchwarzschild時空に与える 質量と角運動量の摂動を別途計算し定数を決定できる

- 残りの定数は計量の摂動$h_{\alpha\beta}$（またはWeylテンソル）が不連続的にならないように調整

結果

- 全頁の解決法でWeylテンソルの複素成分（ψ_0, ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4）の虚部については不連続性がなくなるように出来た
  - Hertzポテンシャルに 角運動量の摂動の情報が加わった
  - 物理的にも解釈が出来るようになったことは慣性系の引きずりの効果を図示する視覚化の方法（Nichols, et al. 2011）を利用すると 目で見て分かる
    - （図 省略）
- Weylテンソルの複素成分の実部については準備中

まとめ

- Teukolsky方程式＋CCK形式を使って Schwarzschild BH＋回転リングの摂動計量を計算
- Hertzポテンシャルを求める段階で Weylスカラーから直接決定できない部分(斉次解)が物理的に重要だと分かった
  - 物理的意味に対応する自由度を別途計算で決定し 残りはWeylテンソルの連続性を条件に決めれば 物理的に正しいHertzポテンシャルを得られそうである
- 上記の問題解決にNichols, et. al (2011)の視覚化が役立った