

2012年度 第42回天文・天体物理若手 夏の学校 集録

クインテッセンスモデルにおける
状態方程式の定量化

平成24年8月1日

東京理科大学大学院 理学研究科
物理学専攻 辻川研究室

修士課程二年

松井 倫子

概要

1998年 Ia型超新星の観測により現在の宇宙は加速膨張していることが示唆された。その源である暗黒エネルギーは現在の宇宙の約70%を占める未解明のエネルギーである。暗黒エネルギーを特徴付ける重要なパラメータとして圧力とエネルギー密度の比で表される状態方程式 $w = P/\rho$ は、加速膨張を引き起こすために現在付近で $w < -1/3$ であることが要請される。

暗黒エネルギーの可能性の一つが状態方程式 $w = -1$ を持つ宇宙定数である。現在の観測より状態方程式が一定の場合は観測的制限 $-1.062 \leq w \leq -0.958$ (68%CL) が課せられている。この宇宙定数によって暗黒エネルギーを説明する標準 Λ -CDM モデルにおいて、暗黒エネルギーの状態方程式は現在の観測と非常に良い一致を示す。一方で暗黒エネルギーのエネルギー密度は理論値と観測値の間に121桁もの差があるという問題を持つ。そのため標準 Λ -CDM モデルの代替案を考える必要がある。

その代替案の一つとしてスカラー場クインテッセンスモデルは広く研究されている。クインテッセンスモデルにおいては状態方程式が時間変化するため、その発展の仕方によって場の振る舞い方が変わる。大まかに、場が時間発展と共に凍結するフリージング・モデルと、宇宙初期に凍結していた場が現在付近で動き出すソーイング・モデルの二つのモデルに分類される。

状態方程式の時間発展は通常数値計算により導かれる。そのため観測からの制限を付ける際には以下の線形近似を用いることが一般的である。

$$w(a) = w_0 + w_a(1 - a) \quad (1)$$

しかし状態方程式が現在付近で非線形な振る舞いをする場合は上式で表現することは困難である。そこでモデル特有の精度の良い近似を用いて状態方程式を定量化することが出来れば、観測からの制限を付ける際に有用である。

クインテッセンスにより暗黒エネルギーが現れるのであれば、その状態方程式は現在付近で -1 に近い一定値を取ることが要請される。そこでソーイング・モデル、フリージング・モデルに特有の方法を用いた状態方程式の定量化を紹介する。今回はポテンシャルの極大点付近で場がスローロールをする”ヒルトップ・クインテッセンス”(ソーイング・モデル)と、トラッキング領域において状態方程式が一定となる”トラッカー解”(フリージング・モデル)において、標準 Λ -CDM モデルからのズレを用いて状態方程式を定量化する [1][2]。この定量化した状態方程式が数値的に解かれる状態方程式と非常に良い精度で一致することを確認し、将来の観測的制限に役立つことを期待する。

1 クインテッセンスモデルとその分類

クインテッセンスは物質場と極めて小さなカップリングを持つスカラー場であり、以下ではカップリングを考えずに議論する。その作用 S は次のように表される。

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{M_{pl}^2}{2} R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right] + S_M \quad (2)$$

ここで g は計量、 R はリッチスカラー、 ϕ はスカラー場、 $V(\phi)$ はポテンシャル、 S_M は非相対論的物質の作用を表す。このときのスカラー場の運動方程式と状態方程式はそれぞれ

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0 \quad (3)$$

$$w_\phi = \frac{P_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)}{\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)} \quad (4)$$

である。

後期加速膨張がクインテッセンスによって引き起こされるのであれば、スカラー場の状態方程式は現在付近で -1 に近づくことが要請される。その時間発展の仕方によってクインテッセンスモデルは大きく二つのモデルに分類される。

- ソーイング・モデル

状態方程式が宇宙初期からほぼ $w = -1$ と一定であり、現在付近で加速膨張の条件を満たしつつ $w = -1$ から推移するモデルをソーイング・モデルという。すなわち宇宙初期に凍結していたスカラー場が現在付近で動き出すモデルである。そのような振る舞いを示す代表的なポテンシャルとして

$$V = M^4 \cos^2(\phi/f) \quad (5)$$

$$V = V_0 + M^{4-n} \phi^n (n > 0) \quad (6)$$

などが挙げられる。

- フリージング・モデル

状態方程式が時間発展と共に $w = -1$ に近づくモデルをフリージング・モデルという。このときスカラー場は時間発展と共に凍結し現在付近で $w = -1$ 付近の値をとる。次のようなポテンシャルがこのモデルに分類される。

$$V = M^{4+n} \phi^{-n} (n > 0) \quad (7)$$

$$V = M^{4+n} \phi^{-n} \exp(\alpha \phi^2 / m_{pl}^2) \quad (8)$$

2 状態方程式の定量化：ソーイング・モデル

ソーイング・モデルにおいて代表的なヒルトップ・クインテッセンスを例に挙げ、状態方程式の定量化を考える。

2.1 ヒルトップ・クインテッセンス

ヒルトップ・クインテッセンスとは、ポテンシャルの極大点付近（ヒルトップ）でスカラー場がスローロールすることによって加速膨張を引き起こすクインテッセンスモデルである。そのときポテンシャルは以下のスローロール条件を満たす。

$$\left(\frac{1}{V} \frac{dV}{d\phi}\right)^2 \ll 1 \quad (9)$$

$$\frac{1}{V} \frac{d^2V}{d\phi^2} \ll 1 \quad (10)$$

一つ目の条件はポテンシャルの勾配が小さいこと、すなわちポテンシャルがほぼ平坦に近いことを示す。二つ目の条件はポテンシャルの曲率を表している。(10)は質量 M を用いて

$$\left| \frac{M}{M_{pl}^2 H_0^2} \right| \ll 1 \quad (11)$$

と表すことができる。質量はポテンシャルの二階微分 $V''(\phi)$ に対応しており、この場合ポテンシャルの極大点 ϕ_* における曲率が小さいことを示している(図1)。このときポテンシャルが運動エネルギーに比べ優勢になるため状態方程式は

$$w_\phi = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)}{\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)} \simeq -1 \quad (12)$$

となり $w < -1/3$ を満たし加速膨張を引き起こす。以上の特性を踏まえた状態方程式の定量化を行う。

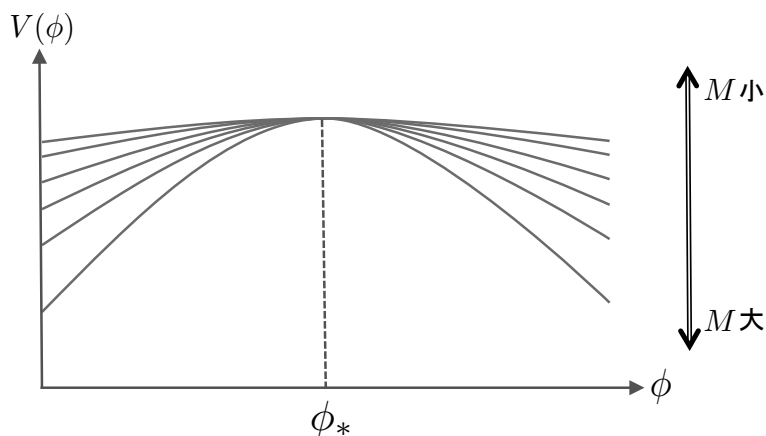


図 1: 数値計算結果との比較

2.2 定量化

ヒルトップ・クインテッセンスにおける状態方程式を定量化していく。状態方程式はスカラー場とポテンシャルによって

$$1 + w = \frac{\dot{\phi}^2}{V(\phi_*)} \quad (13)$$

と表されるため、場の解析解を得ることができれば状態方程式の解析解を得ることができる。したがって場の運動方程式を解いていく。まず任意関数 $u(t)$ とスケール因子 $a(t)$ を用いて

$$\phi \equiv u(t)/a(t)^{3/2} \quad (14)$$

とおくことにより、運動方程式の摩擦項を消去する。全圧力を P として、

$$\ddot{u} + \frac{3}{4}Pu + a(t)^{3/2}V'(u/a(t)^{3/2}) = 0. \quad (15)$$

ここでソーイング・モデルの状態方程式は現在付近まで Λ -CDM モデルのそれと非常によく似た時間発展をすることから、場のエネルギー密度の現在値 $\rho_{\phi 0}$ を用いて $P \approx -\rho_{\phi 0}$ という近似が可能である。更にポテンシャルをスローロールの条件のオーダーまで $V(\phi) = V(\phi_*) + (1/2)V''(\phi_*)\phi_*^2 + \dots$ と展開することにより次式を得る。

$$\ddot{u} + [V''(\phi_*) - (3/4)V(\phi_*)]u = 0 \quad (16)$$

これを解くことにより場の解析解が

$$\phi = \frac{\phi_i}{(2k/\sqrt{3\rho_{\phi 0}t})} \frac{\sinh(K)}{\sinh(\sqrt{3\rho_{\phi 0}t}/2)} \quad (17)$$

と求まる。ここで $k \equiv \sqrt{(3/4)V(\phi_*) - V''(\phi_*)}$, $K \equiv \sqrt{1 - (4/3)M_{pl}^2 V''(\phi_*)/V(\phi_*)}$ であり、 K はポテンシャルの極大点における曲率を表している。さらに Λ -CDM モデルにおけるフリードマン方程式から、物質優勢期以降におけるスケール因子が

$$a(t) = \left[\frac{1 - \Omega_{\phi 0}}{\Omega_{\phi 0}} \right]^{1/3} \sinh^{2/3}(\sqrt{3\rho_{\phi 0}t}/2) \quad (18)$$

と求められる。したがって状態方程式の解析解は次のように導かれる。

$$1 + w(a) = (1 + w_0)a^{3(K-1)} \frac{[(F(a) + 1)^K(K - F(a)) + (F(a) - 1)^K(K + F(a))]^2}{[(\Omega_{\phi 0}^{-1/2} + 1)^K(K - \Omega_{\phi 0}^{-1/2}) + (\Omega_{\phi 0}^{-1/2} - 1)^K(K + \Omega_{\phi 0}^{-1/2})]^2} \quad (19)$$

ここで

$$F(a) \equiv \sqrt{1 + (\Omega_{\phi 0}^{-1} - 1)a^{-3}} \quad (20)$$

であり、 $\Omega_{\phi 0}$ は場の密度パラメータの現在値を表す。

2.3 数値計算結果との比較

(19) と状態方程式の数値計算結果の比較を図2に示す。ここでポテンシャルは擬南部・ゴールドストーンボソンポテンシャル $V = \mu^4[1 + \cos(\phi/f)]$ を用いた。ポテンシャルの極大点における曲率を変化させたそれぞれの場合について数値計算結果との差は $\delta w \lesssim 0.1\%$ となり非常に良い一致を見せた。

その他のポテンシャルを用いて比較した場合は、ガウス型ポテンシャル $V = M^4 e^{-\phi^2/\sigma^2}$ で $\delta w \lesssim 0.5\%$ 、二次のポテンシャル $V = V_0 - V_2 \phi^2$ においては $\delta w \lesssim 0.3\%$ となった。

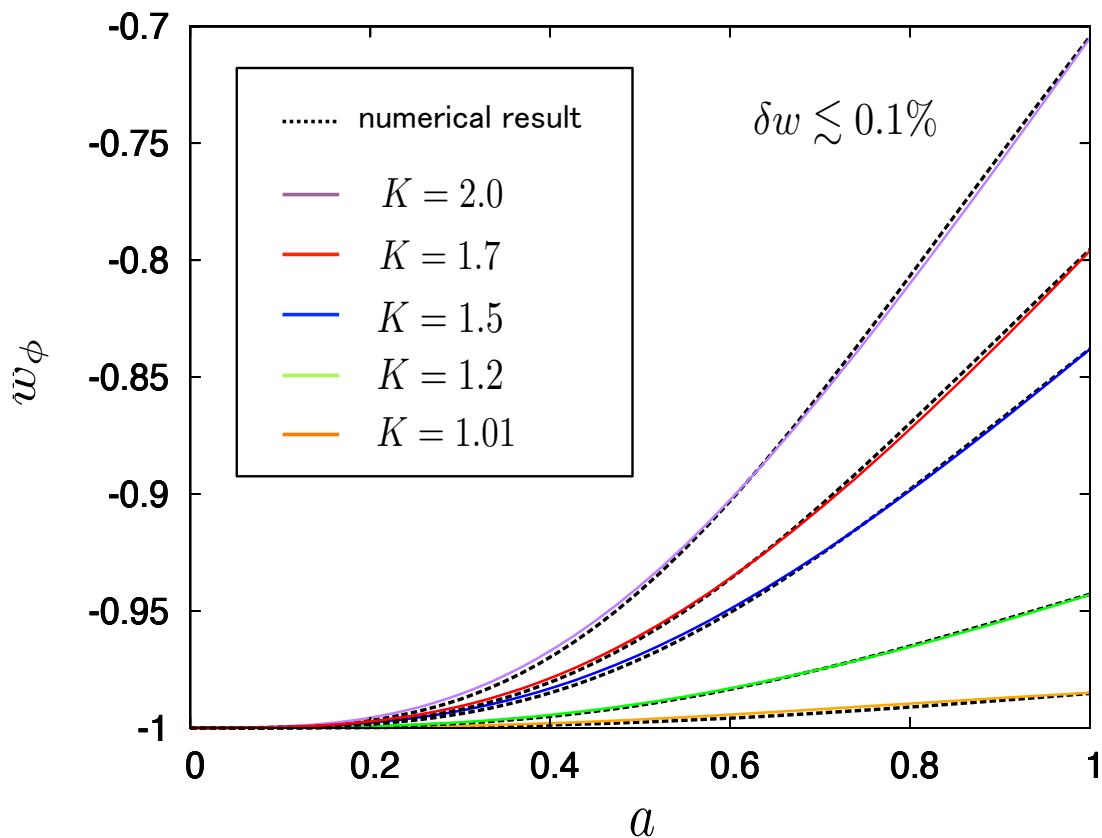


図 2: 数値計算結果との比較

3 状態方程式の定量化：フリージング・モデル

3.1 トラッカー解

トラッカー解とはトラッカー条件

$$\Gamma = \frac{VV_{,\phi\phi}}{V^2_{,\phi}} > 1 \quad (21)$$

を満たすポテンシャルにより現れる後期加速膨張解のことである。その特徴は初期値の厳密な調整をすることなく現在付近で優勢になり得ることである。物質優勢期に状態方程式は一定の値に収束し、その後 -1 へ向けて推移する。このとき状態方程式が収束する領域はトラッキング領域と呼ばれ、トラッキング領域における状態方程式の値はポテンシャルの形によって次のように決まる。

$$w = -\frac{2(\Gamma - 1)}{2\Gamma - 1} \quad (22)$$

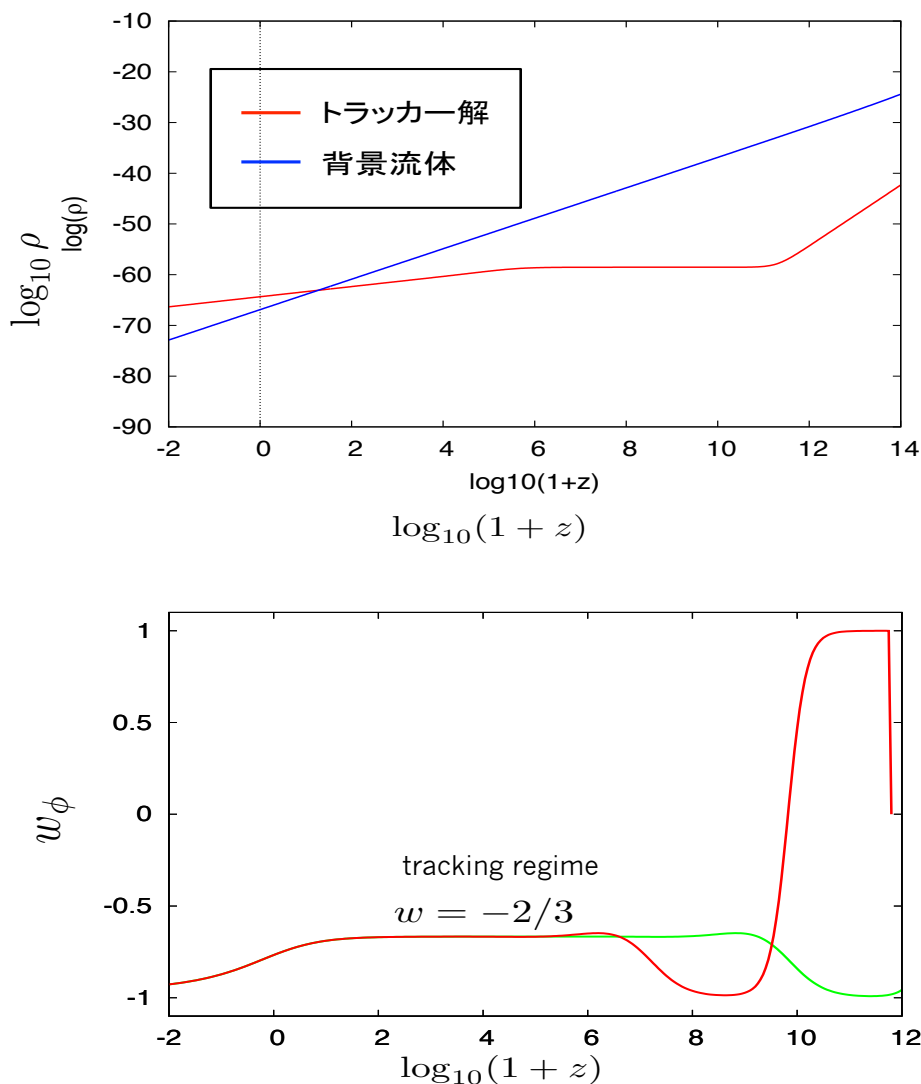


図 3: エネルギー密度と状態方程式の振る舞い ($V = M^5 \phi^{-1}$)

3.2 定量化

トラッカー解が現れるクインテッセンスモデルにおける状態方程式の定量化を行う。状態方程式は物質優勢期にトラッキング領域に入り，そこから -1 へ向けて推移する。したがって，トラッキング領域における状態方程式の値 $w_{(0)} = -2(\Gamma - 1)/(2\Gamma - 1)$ とそこからのズレ δw を計算すれば，状態方程式の解析解

$$w(a) = w_{(0)} + \delta w \quad (23)$$

が導かれる。

ここではトラッカー解が現れる代表的なポテンシャルであるインバース・パワーロウ

$$V = M^{4+\alpha}\phi^{-\alpha} \quad (24)$$

を用いて議論していく。このとき

$$\Gamma = \frac{\alpha + 1}{\alpha} \quad (25)$$

$$w_{(0)} = -\frac{2(\Gamma - 1)}{2\Gamma - 1} = -\frac{2}{\alpha + 2}. \quad (26)$$

はじめに，場の運動方程式とトラッカー条件より次式が得られる。

$$\pm \frac{V'}{V} = \sqrt{\frac{3(1+w)}{M_{pl}^2 \Omega_\phi(a)}} \left(1 + \frac{\dot{x}}{6}\right) \quad (27)$$

$$\Gamma - 1 = \frac{V_{,\phi\phi}}{V_\phi^2} - 1 = \frac{w_B - w_\phi}{2(1+w_\phi)} - \frac{(1+w_B - 2w_\phi)\dot{x}}{2(1+w_\phi)(6+\dot{x})} + \frac{3(w_\phi - w_B)\Omega_\phi(a)}{(1+w_\phi)(6+\dot{x})} - \frac{2\ddot{x}}{(1+w_\phi)(6+\ddot{x})^2} \quad (28)$$

ここで $x = (1+w)/(1-w)$ ， $\dot{x} = d \ln x / d \ln a$ ， $\Omega_\phi(a) = \frac{\Omega_{\phi 0} a^{-3w_{(0)}}}{\Omega_{\phi 0} a^{-3w_{(0)}} + (1 - \Omega_{\phi 0})}$ とした。これらより δw の微分方程式は

$$a^2 \frac{d^2 \delta w}{da^2} + \frac{5 - 6w_{(0)}}{2} a \frac{d\delta w}{da} + \frac{9}{2} (1 - w_{(0)}) \delta w - \frac{9}{2} w_{(0)} (1 - w_{(0)}^2) \Omega_\phi(a) + 9(1 - w_{(0)}^2)(1 + w_{(0)}) d\Gamma = 0 \quad (29)$$

となる。ただし今 $d\Gamma = 0$ である。これを解くことによりトラッカー解を持つクインテッセンスモデルの一つであるインバース・パワーロウポテンシャルにおける状態方程式の解析解が次のように導かれる。

$$w(a) = w_{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} w_{(0)} (1 - w_{(0)}^2)}{2n(n+1)w_{(0)}^2 - (n+1)w_{(0)} + 1} \left(\frac{\Omega_\phi(a)}{1 - \Omega_\phi(a)} \right)^n \quad (30)$$

3.3 数値計算結果との比較

(30) と状態方程式の数値計算結果の比較を図4に示す。ここで(30)において $n = 2$ とした。トラッキング領域における状態方程式の値 $w_{(0)}$ から加えたズレ δw の項の次数が上がるにつれ、解析解が数値計算結果に近づく様子がわかる。したがってより高次の項まで含めればより精度が上がるのが推測される。

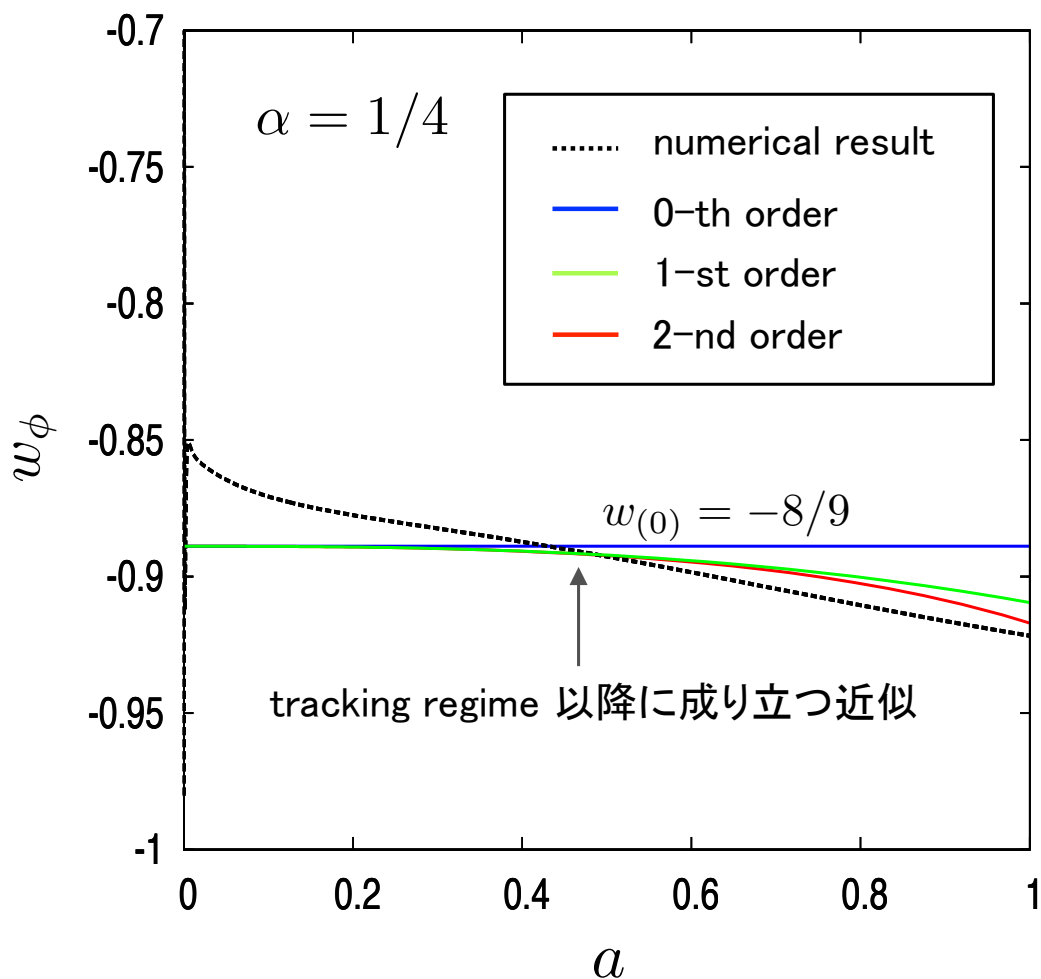


図 4: 数値計算結果との比較

4 まとめ

ヒルトップ・クインテッセンス（ソーイング・モデル），トラッカー解（フリージング・モデル）の状態方程式について以下のような定量化をした．

$$1 + w(a) = (1 + w_0)a^{3(K-1)} \frac{[(F(a) + 1)^K(K - F(a)) + (F(a) - 1)^K(K + F(a))]^2}{[(\Omega_{\phi 0}^{-1/2} + 1)^K(K - \Omega_{\phi 0}^{-1/2}) + (\Omega_{\phi 0}^{-1/2} - 1)^K(K + \Omega_{\phi 0}^{-1/2})]^2}$$
$$w(a) = w_{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} w_{(0)} (1 - w_{(0)}^2)}{2n(n+1)w_{(0)}^2 - (n+1)w_{(0)} + 1} \left(\frac{\Omega_{\phi}(a)}{1 - \Omega_{\phi}(a)} \right)^n$$

これらは全てのソーイング・モデル，フリージング・モデルに適応できるわけではなく，その他の定量化の方法も提案されている [3]．今後は上式を用いて実際に観測からの制限をつけていく．

参考文献

- [1] S. Dutta and R. J. Scherrer, Phys. Rev. D **78**, 12352510 (2008)
- [2] T. Chiba, Phys. Rev. D **81**, 023515 (2010)
- [3] R.N. Cahn, R. de Putter, and E.V. Linder, arXiv:0807.1346