

超新星爆発のための 衝撃波捕獲スキーム

中川恵介

研究背景

Ⅱ型超新星爆発は完全には解明されていない。
(爆発メカニズム、中性子星の状態方程式など)
→流体シミュレーションを行いたい。
(ただし、今回の内容は超新星爆発に限定したものではありません。)

Ex.15Msolar

- 光速に近い流体速度 ($v \sim 0.1c$)
- 高温 ($T \sim 1\text{MeV}$)
- 強重力場 ($2M/r \sim 0.4$)
- 衝撃波の発生

研究背景

- 流体に対して相対論効果を考慮。
- 衝撃波のような不連続面を扱えるスキーム。

球対称一般相対論流体方程式を導出し、KTスキームを適用して、計算を行った。

- Alexander Kurganov & Eitan Tadmor (2000)
- Shibata masaru (2003)

目次

- 相対論的流体方程式
- KTスキーム
- アルゴリズム
- 結果

相对論的流体方程式

計算の準備

今回は球対称で考える。

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + 2\beta dt dr + g_{rr} dr^2 + g_{\theta\theta} d\Omega^2$$

$$T^{\mu\nu} = h\rho u^\mu u^\nu + P g^{\mu\nu}$$

$$h = 1 + e + \frac{P}{\rho}$$

$$g_{rr} = A$$

$$g_{\theta\theta} = r^2 B$$

$$D_\alpha = \frac{\alpha'}{\alpha}$$

$$D_A = \frac{A'}{A}$$

$$D_B = \frac{B'}{B}$$

連続の式

$$\nabla_{\mu}(\rho u^{\mu}) = 0$$

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho u^t) + \frac{1}{\alpha\sqrt{\gamma}}(\partial_t\alpha\sqrt{\gamma})\rho u^t \\ + \partial_r(\rho u^r) + \frac{1}{\alpha\sqrt{\gamma}}(\partial_t\alpha\sqrt{\gamma})\rho u^r = 0 \end{aligned}$$

$$\partial_t(\alpha\sqrt{\gamma}\rho u^t) + \partial_r(\alpha\sqrt{\gamma}\rho u^r) = 0$$

オイラー方程式

$$\gamma^\nu \nabla_\mu T^\mu{}_\nu = 0$$

$$\partial_\mu T^\mu{}_r + \Gamma_{\nu\mu}^\mu T^\nu{}_r + \Gamma_{r\nu}^\mu T^\mu{}_\nu = 0$$

$$\partial_t(\alpha\sqrt{\gamma}\rho h u^t u_r)$$

$$+ \partial_r(\alpha\sqrt{\gamma}\rho h u^r u_r + \alpha\sqrt{\gamma}P) = \alpha\sqrt{\gamma}\frac{1}{2}T^{\mu\nu}\partial_r g_{\mu\nu}$$

エネルギー方程式

$$n_\nu \nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

$$\nabla_\mu (n_\nu T^{\mu\nu}) - T^{\mu\nu} \nabla_\mu n_\nu = 0$$

$$\partial_t (\alpha \sqrt{\gamma} \alpha \rho h u^t u^t - \sqrt{\gamma} P)$$

$$+ \partial_r (\alpha \sqrt{\gamma} \alpha \rho h u^t u^r) = \alpha \sqrt{\gamma} T^{\mu\nu} \nabla_\mu n_\nu$$

定式化

$$w = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{Av^2}{\alpha^2}}}$$

$$\rho_* = \rho w \sqrt{\gamma}$$

$$\hat{u}_r = hu_r$$

$$\hat{e} = hw - \frac{\sqrt{\gamma}P}{\rho_*}$$

古典流体方程式と
同じ形にするために
これらの量を導入。

相對論的流体方程式

$$\partial_t \begin{pmatrix} \rho_* \\ \rho_* \hat{u}_r \\ \rho_* \hat{e} \end{pmatrix} + \partial_r \begin{pmatrix} \rho_* v \\ (\rho_* \hat{u}_r)v + \alpha \sqrt{\gamma} P \\ (\rho_* \hat{e})v + \sqrt{\gamma} P v \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\alpha \sqrt{\gamma} P}{2} (D_A + 2D_B) - \alpha (\rho_* \hat{e}) D_\alpha + \frac{(\rho_* \hat{u}_r)v A D_A}{2} \\ \alpha \sqrt{\gamma} K P + (\rho_* \hat{u}_r)v A K_A - (\rho_* \hat{u}_r) \alpha D_\alpha \end{pmatrix}$$

$$\partial_t \vec{Q} + \partial_r \vec{F} = \vec{S}$$

古典

$$\partial_t \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ \rho e \end{pmatrix} + \partial_r \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v v + p \\ \rho e v + \rho p v \end{pmatrix} = 0$$

KTスキーム

今回は1次元の場合を導出するが、
多次元でも全く同じ。

モチベーション

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} = 0$$

$A = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{u}}$ の固有値 λ は
各モードに対応した速度である。

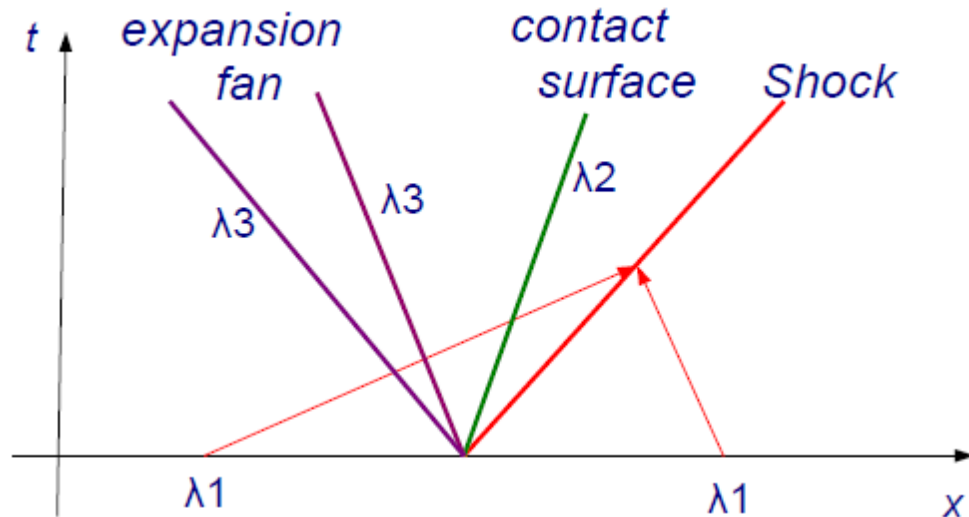
$$\lambda_1 = v - c$$

$$\lambda_2 = v$$

$$\lambda_3 = v + c$$

v は流体の速度。
 c は音速。

モチベーション



- ◆ *Shock wave* → λ_1 or λ_3 の交差する不連続面。音速を超えたときに発生。
- ◆ *Contact surface* → λ_2 と一致する、密度の不連続面。
- ◆ *Expansion fan* → λ_1 or λ_3 によって挟まれた領域。連続的に変化する。

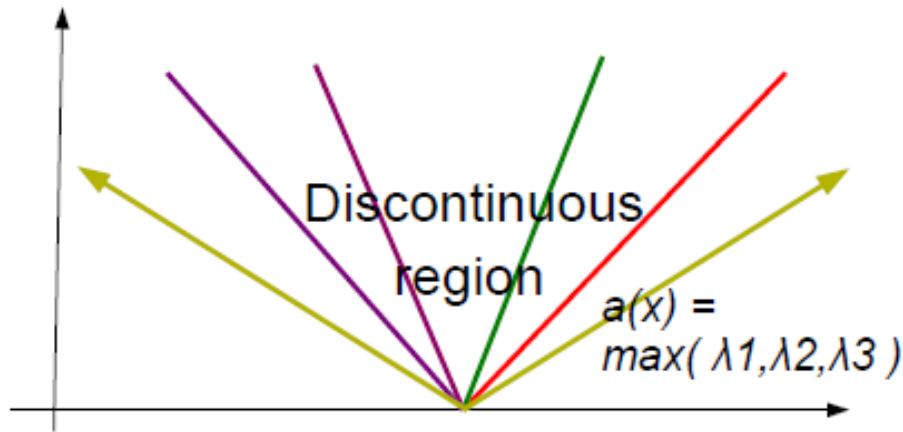
モチベーション

- ゴドノフ型スキームでは、風上差分を使っている。
- Roeスキーム・・・ A を線形化し、風上差分。
- Marquinaスキーム・・・ λ の符号で風上差分と中心差分を切り替える。

→行列 A の対角化が必要になる、が、相対論の場合、煩雑になってしまう。

対角化のいらないスキーム→KTスキーム。

基本的な考え方



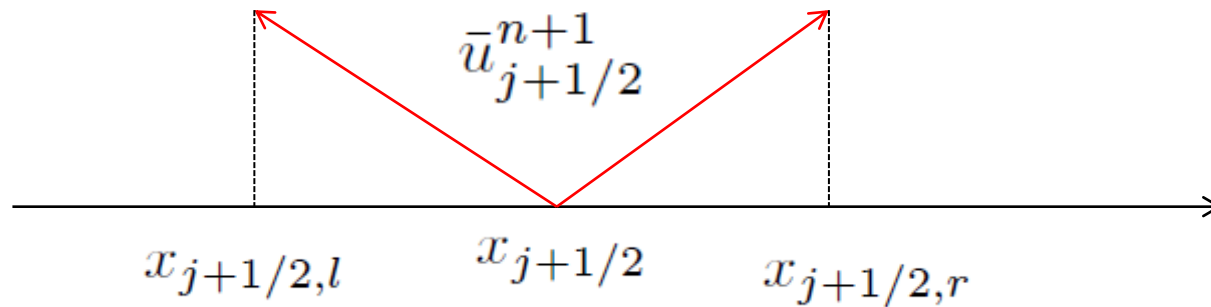
3つの λ のうち、
最大のものを a とする。

*Shock, contact surface, expansion fan*は必ず領域に含まれる！

領域内外でテイラー展開した u を積分し、
それぞれの平均値を求める。

$$u(x) = u_j + (u_x)_j(x - x_j) \quad x_{j-1/2} \leq x \leq x_{j+1/2}$$

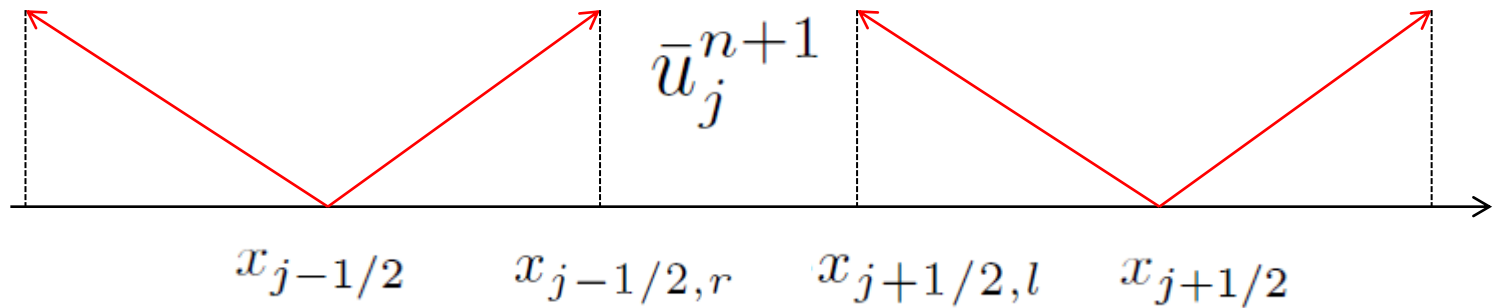
導出



$$\bar{u}_{j+1/2}^{n+1} = \frac{1}{\Delta x_{j+1/2}} \int_{x_{j+1/2,l}}^{x_{j+1/2,r}} u(x, t^n) dx - \frac{1}{\Delta x_{j+1/2}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} [f(\tau)_{j+1/2,r} - f(\tau)_{j+1/2,l}] d\tau$$

不連続面を含む領域の平均値を計算。

導出



$$\bar{u}_j^{n+1} = \frac{1}{\Delta x_j} \int_{x_{j-1/2,r}}^{x_{j+1/2,l}} u(x, t^{n+1}) dx$$

(不連続面の原因となる)情報が届かない領域の平均値を計算。

導出

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j-1/2,r}} \bar{u}_{j-1/2}^{n+1} + (u_x)_{j-1/2}^{n+1} (x - x_{j-1/2}) dx \\ &\quad + \int_{x_{j-1/2,l}}^{x_{j+1/2,l}} \bar{u}_j^{n+1} dx \\ &\quad + \int_{x_{j+1/2,l}}^{x_{j+1/2}} \bar{u}_{j+1/2}^{n+1} + (u_x)_{j+1/2}^{n+1} (x - x_{j+1/2}) dx \end{aligned}$$

先ほど求めた平均値をj-1/2からj+1/2でさらに平均し、もとのグリッドjに戻す。

導出

$$\frac{du_j}{dt} = -\frac{H_{j+1/2} - H_{j-1/2}}{\Delta x}$$

$$H_{j+1/2} = \frac{f(u_{j+1/2}^+) + f(u_{j+1/2}^-)}{2} - \frac{a_{j+1/2}}{2} [u_{j+1/2}^+ - u_{j+1/2}^-]$$

$$u_{j+1/2}^+ = u_{j+1} - \frac{\Delta x}{2} (u_x)_{j+1}$$

$$u_{j+1/2}^- = u_j + \frac{\Delta x}{2} (u_x)_j$$

最終的に、このような形にまとめられる。
左辺の時間微分はルンゲクッタで計算する。

アルゴリズム

流体方程式に
KTスキームを適用する。

アルゴリズム

- 相対論的流体方程式は、古典流体と同じ形をしているため、KTスキームがそのまま適用できる。

$$\partial_t \begin{pmatrix} \rho_* \\ \rho_* \hat{u}_r \\ \rho_* \hat{e} \end{pmatrix} + \partial_r \begin{pmatrix} \rho_* v \\ (\rho_* \hat{u}_r)v + \alpha \sqrt{\gamma} P \\ (\rho_* \hat{e})v + \sqrt{\gamma} P v \end{pmatrix}$$

$$\partial_t \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ \rho e \end{pmatrix} + \partial_r \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v v + p \\ \rho e v + \rho p v \end{pmatrix}$$

アルゴリズム

$$\vec{Q}$$

各グリッドのQを入力



$$\partial_r \vec{Q}$$

差分を求める

問題1



$$\vec{Q}_- \quad \vec{Q}_+$$

一次のテイラー展開



$$\vec{F}_- \quad \vec{F}_+$$

$$\lambda_- \quad \lambda_+$$

対応するフラックス、特性速度

問題2

アルゴリズム



a



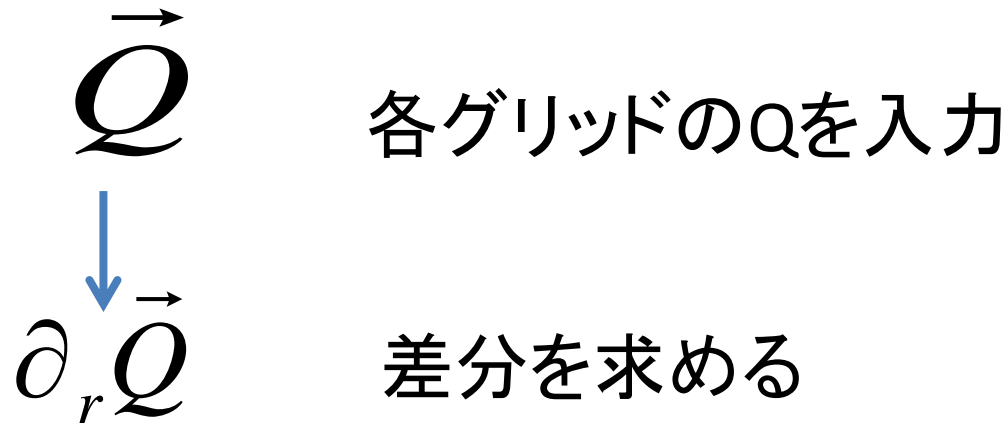
各グリッドでの最大速度
を決定

$$\vec{Q}_i^{new} = (\vec{H}_i - \vec{H}_{i-1}) / \Delta r$$

新しいQの決定

$$\begin{aligned} \vec{H} &= (\vec{F}_+ - \vec{F}_-) / 2 \\ &\quad - a \times (\vec{Q}_+ - \vec{Q}_-) / 2 \end{aligned}$$

アルゴリズム、問題1



ゴドノフの定理

二次精度以上のいかなる線形スキームも
単調性を維持することは出来ない。

$$Q_i^{new} = \sum_k C_k Q_{i+k} \quad \text{非線形になるCが必要。}$$

アルゴリズム、問題2

\vec{Q}_- \vec{Q}_+ 一次のテイラー展開



\vec{F}_- \vec{F}_+ λ_- λ_+ 対応するフラックス、特性速度

このプロセスにおいて、 ρ 、 v 、 P が必要。

$$Q_1 = \sqrt{\gamma} \rho w$$

$$Q_2 = Q_1 h u_r$$

$$Q_3 = Q_1 h w - \sqrt{\gamma} p$$

アルゴリズム、問題2

$$\bar{v} = \frac{\alpha Q_1 / A}{Q_3 + Q_2 + \sqrt{\gamma} \bar{P}}$$

$$\bar{w} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{A \bar{v}^2}{\alpha^2} \right)}}$$

$$\bar{\rho} = \frac{Q_1}{\sqrt{\gamma} \bar{w}}$$

$$\bar{e} = \frac{Q_3 + Q_1(1 - \bar{w}) + \sqrt{\gamma} \bar{P}(1 - \bar{w}^2)}{w Q_1}$$

アルゴリズム、問題2

- 二分法を使って、 ρ 、 v 、 P を求める。

P の最大値は、 $v=0$ のとき。

$$P_{\max} = p(Q1)$$

P の最小値は、 $v=1$ のとき。

$$P_{\min} = \alpha Q2/A - Q1 - Q3$$

$$F = p(\bar{\rho}, \bar{e}) - \bar{p}$$

あいだにある根を
求める。

計算結果

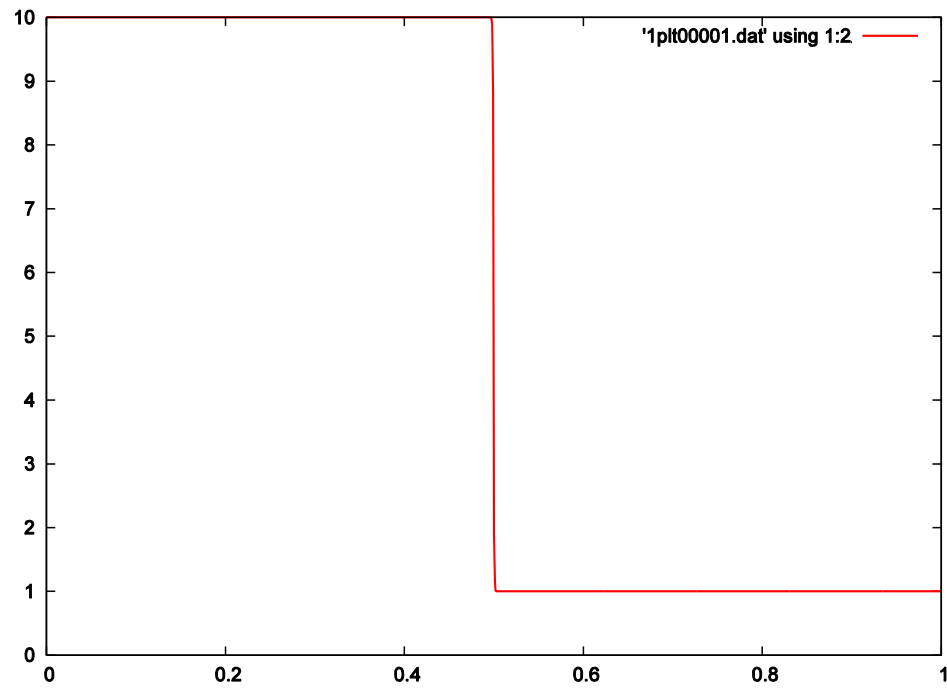
Shocktube problem

- 理想気体の状態方程式、1次元。
- 仕切りの左右でそれぞれ一定の分布をもつ管を考える。

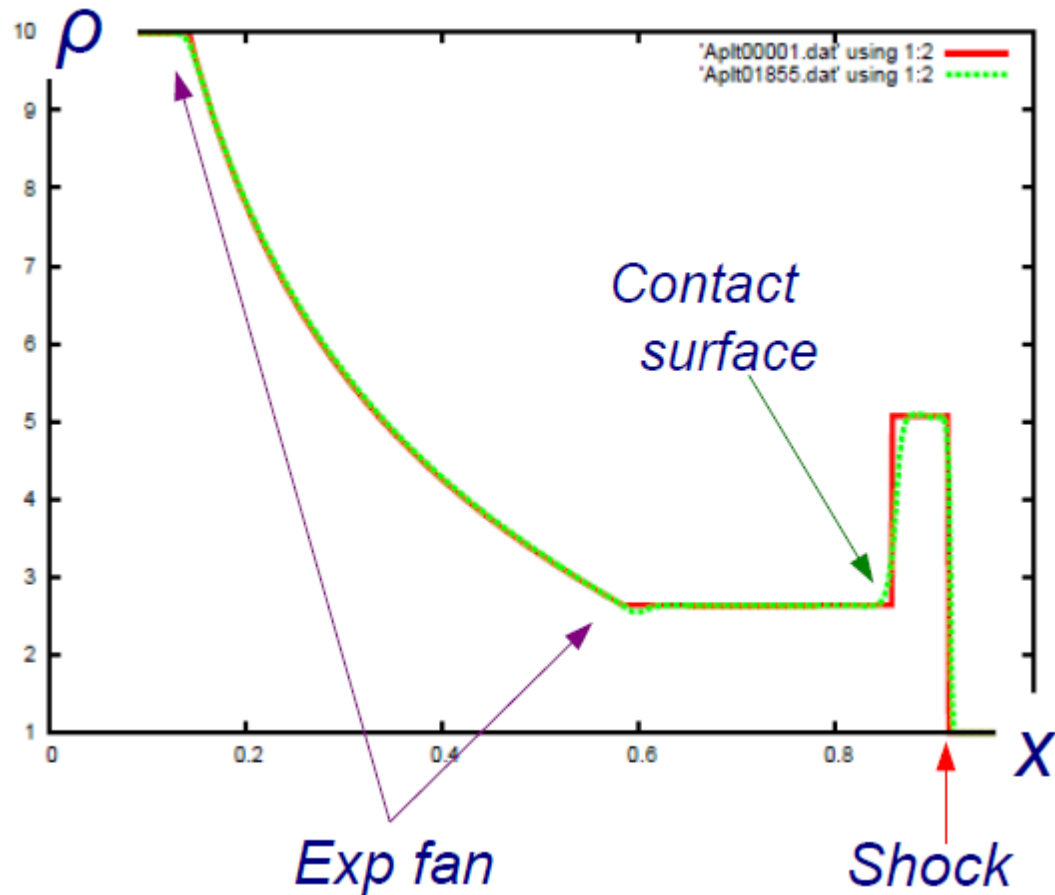
仕切りを外すと、shock、contact surface、expansion fanが発生する。

厳密解が存在するので、不連続面が扱えているかのチェックになる。

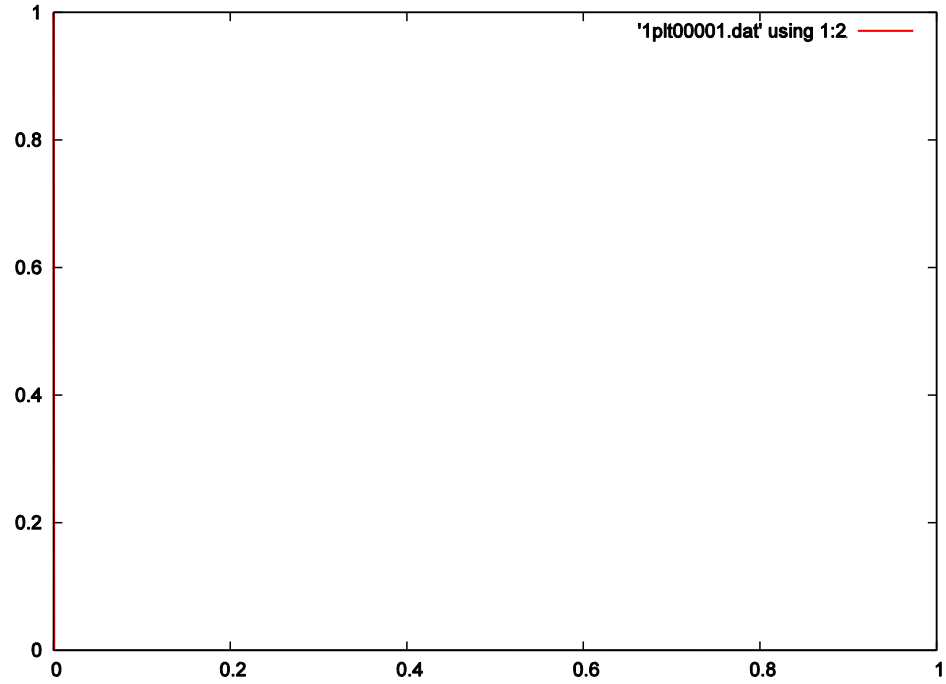
密度



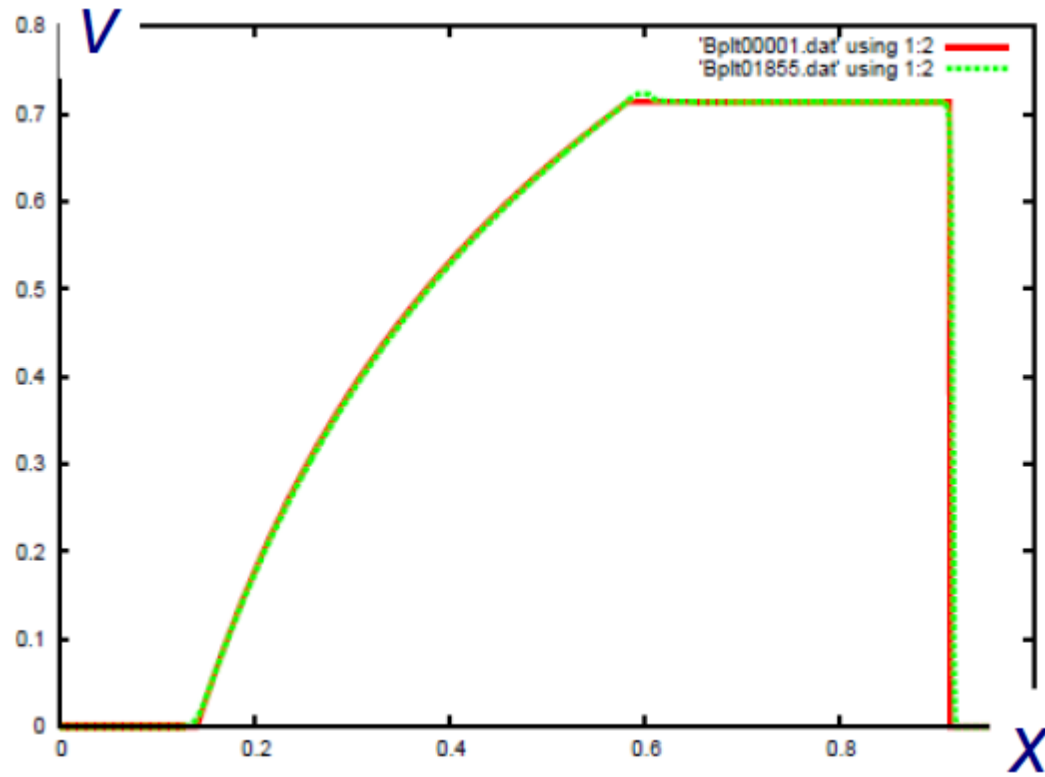
密度



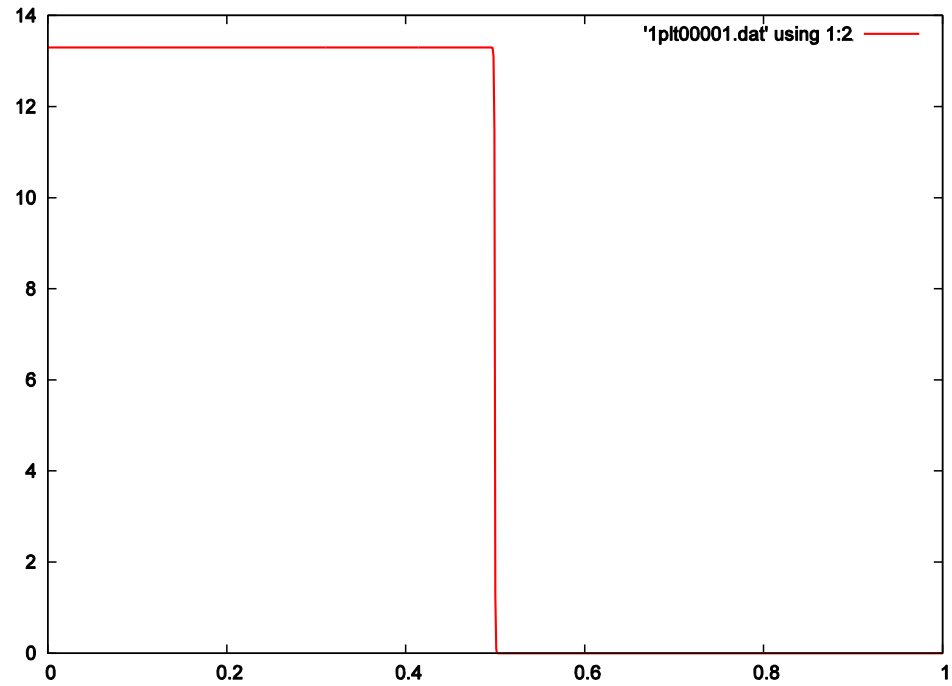
速度



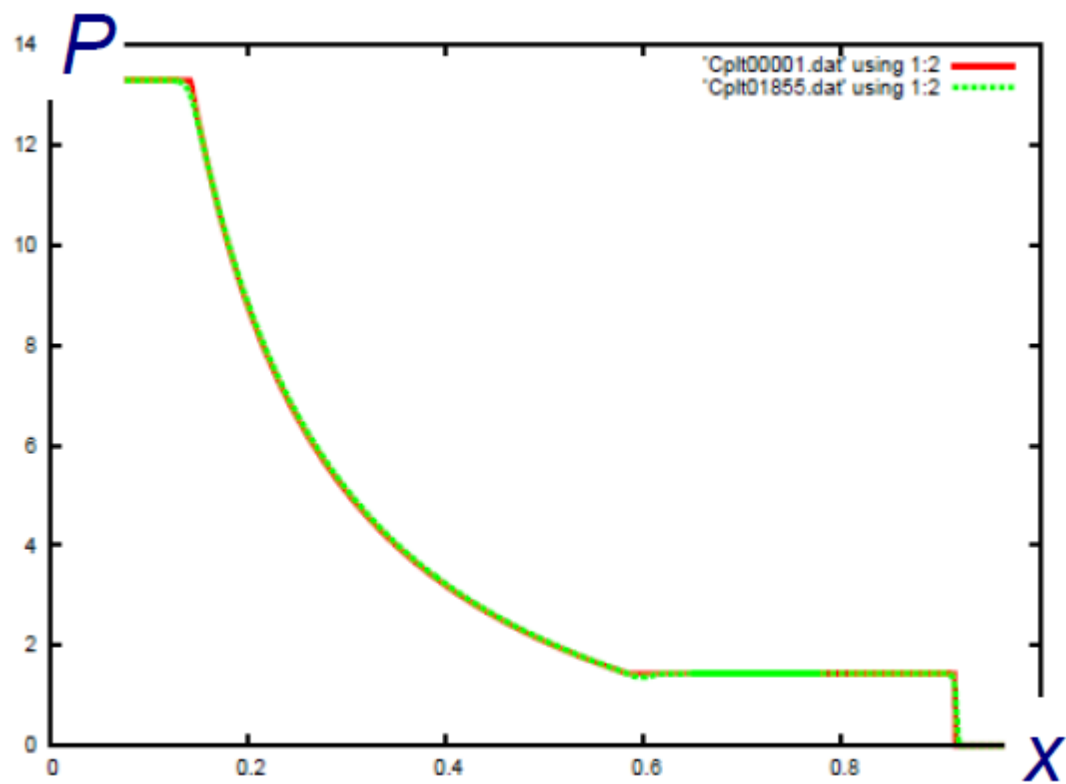
速度



压力



压力



今後の展望

- KTスキームは相対論的流体方程式の場合にも有効であることが分かった。
- 流体方程式、アインシュタイン方程式、ニュートリノ輻射輸送方程式をカップルさせ、球対称な超新星爆発のシミュレーションを行う。

reference

- Alexander Kurganov & Eitan Tadmor, Journal of Computational Physics 160, p720-742, (2000)
- Shibata Masaru, Physical Review D, vol. 67, Issue 2, (2003)
- José Maria Martí and Ewald Müller, Living Rev. Relativity 6, 7, (2003)