

# MHD Riemann 問題の解の非一意性と安定性

高橋 和也<sup>†</sup> (早稲田大学 D1)

## 概要

理想磁気流体 (ideal Magnetohydrodynamics ; 以下 MHD) 方程式は磁場中の流体現象を記述する、宇宙物理学の分野であまねく利用される方程式である。しかし、初期条件が不連続面を含む時間発展問題 (Riemann 問題) の解が一般には一意に定まらない、ということはあまり知られていない。通常の流体の場合はエントロピー条件と呼ばれる、衝撃波を通過した後にエントロピーが増大するという物理的要請を課すことで、複数個ある解のうち1つを選出している。一方、MHD の場合は解を1つに選出するにはエントロピー条件だけでは不十分であることが知られている。そのため、MHD では発展性条件と呼ばれる不連続面の安定性に関する条件をさらに課すことで1つの解を選出する。ところが、多くの MHD 数値計算では発展性条件を満たす解が現れず、逆に発展性条件を満たさない (即ち不安定であるはずの) 解が現れることが知られており、その解釈を巡り議論がなされている。我々は、与えられた MHD Riemann 問題の厳密解を実際に全て構成する、という従来とは全く異なるアプローチでこの問題を研究してきた。本講演では研究結果と、それに示唆される現在の数値計算手法の妥当性について議論した。

## 1 導入

宇宙における高エネルギー現象は、電磁場が重要な役割を果たしていることが多い。そのような現象は、高エネルギーで電離したプラズマ状態の物質と、星間空間に満ちる磁場や星の磁場との相互作用によって引き起こされるからである。これらの現象の多くは、理想磁気流体 (ideal MHD ; 以下単に MHD) 方程式によって記述される。MHD 方程式は流体の保存則の式 (質量保存、運動量保存、エネルギー保存) に Maxwell 方程式と Ohm の法則を組み合わせ、電気伝導度が無限大、散逸を無視という近似をした方程式系である。現在まで多くの MHD 数値計算が行われているが、実はそれが正しいという保証はない。なぜなら、MHD 数値計算においては、理論上不安定であるとされる中間衝撃波と呼ばれる波が、なぜか安定に存在しているからである。中間衝撃波とは、その衝撃波面の前後で波面接線方向の磁場が 180 度反転するような衝撃波のことをいう。MHD 方程式は不連続面を含む初期条件の時間発展 (Riemann 問題と呼ぶ) の解が一意に定まらず、場合によっては中間衝撃波を含む解と、含まない解の両方が構成できる。そこで、線形解析によって中間衝撃波の安定性を議論し、どちらの解が物理的に妥当な解かを判断するのである。この理論解析によると中間衝撃波は不安定であり、中間衝撃波を含まない解が物理的に妥当であると結論づけられる (e.g.[5],[6])。しかしながら、実際の数値計算では中間衝撃波を含む解が現れ、しかも安定である。この理論と数値計算の矛盾は、その解釈を巡り多くの議論がなされているが、未だ統一見解がないままになっている ([1],[2],[3],[4],[9],[10],[11],[12],[13])。

また、そもそもどういう初期条件に対して中間衝撃波を含む解が構成できるのか、というのも明らかになっていない。先行研究として M. Torrilhon (2002,2003)([7],[8]) の解析が挙げられるが、解に現れる中間衝撃波の種類を限定するなど、完全な議論になってはいない。そこで我々は任意の Riemann 問題に対して、とり得

---

<sup>†</sup> Email address for correspondence: ktakahashi@heap.phys.waseda.ac.jp

る厳密解を全て得られる手法を開発し、この問題に取り組んだ。

## 2 手法

MHD Riemann 問題の厳密解を求める手法について説明する。MHD Riemann 問題の場合、解が中間衝撃波を含まないと仮定すると、a priori に出現する波の数 (contact discontinuity と、その左右に1つずつ現れる fast wave, rotational discontinuity, slow wave の7つ) と種類が決定できる。そしてこれらの波の上流と下流は1-パラメーターでつながれており、上流の物理量とこのパラメーターが与えられると、下流の物理量が全て決定できる。即ち Riemann 問題は、初期に与えた左右の状態を consistent につなぐように各波のパラメーターを決定するという、代数方程式を解く問題に帰着する。

一方、中間衝撃波を含む解を探す場合は、出現する波の数と種類を a priori に決定することができない。そのため、数種類ある中間衝撃波のうちどの中間衝撃波を含むかで場合分けをして解を探す。

## 3 結果

我々は最も有名な MHD Riemann 問題の1つである、Brio & Wu (1988)([1]) の初期条件に対して、可能な全ての解を求めた。その結果、従来知られていた数値計算で現れる中間衝撃波を含む解と、理論的に安定な中間衝撃波を含まない解の他に、この両方の解を連続的につなげる、中間衝撃波を含む不可算無限個の解の系列を得た。これにより、従来議論されてきた「なぜ数値計算では中間衝撃波が安定なのか」という問題が、実は「なぜ数値計算では他の中間衝撃波は現れないのか」という問題もはらんでいることが明らかになった。現在まで、これに明確に答えられる研究は存在せず、今後議論されるべき問題である。より詳細な議論とその他の結果については、K. Takahashi & S. Yamada (2012)([14]) を参照されたい。

## 参考文献

- [1] M. Brio and C. C. Wu, JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS 75, 400-422, 1988
- [2] S. A. E. G. Falle and S. S. Komissarov, On the Existence of Intermediate Shocks, 12th 'Kingston meeting': Computational Astrophysics, ASP Conference Series Vol. 123, 1997, David A. Clark & Michael J. West (eds.)
- [3] S. A. E. G. Falle and S. S. Komissarov, Journal of Plasma Physics(2001), vol. 65, part 1, pp. 29-58
- [4] T. Inoue and S. Inutsuka, Progress of Theoretical Physics, Vol. 118, No. 1, July 2007
- [5] A. Jeffrey and T. Taniuti, Non-linear Wave Propagation, Academic Press, New York-London, 1964
- [6] P. D. Lax, COMMUNICATIONS ON PURE AND APPLIED MATHEMATICS, VOL. X, 537-566, 1957
- [7] M. Torrilhon, Exact Solver and Uniqueness Conditions for Riemann Problems of Ideal Magnetohydrodynamics, research report 2002-06, Zurich: Seminar for Applied Mathematics, ETH, 2002
- [8] M. Torrilhon, Journal of Plasma Physics(2003), vol. 69, part 3, pp. 253-276
- [9] C. C. Wu, Geophysical Research Letters, Vol. 14, No. 6, Pages 668-671, June 1987
- [10] C. C. Wu, Journal of Geophysical Research, Vol. 93, No. A2, Pages 987-990, February 1, 1988
- [11] C. C. Wu, Journal of Geophysical Research, Vol. 93, No. A5, Pages 3969-3982, May 1, 1988

- [12] C. C. Wu, *Journal of Geophysical Research*, Vol. 95, No. A6, Pages 8149-8175, June 1, 1990
- [13] C. C. Wu and C. F. Kennel, *Geophysical Research Letters*, Vol. 19, No. 20, Pages 2087-2090, October 23, 1992
- [14] K. Takahashi and S. Yamada, *Journal of Plasma Physics*, submitted